Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 1
CCP DS1 25 octobre 2017

Préliminaire

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0,2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$C(a,\varphi,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + k\varphi) \qquad \text{et} \qquad S(a,h,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + k\varphi)$$

Etablir les formules :

$$C(a,\varphi,n) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)\cos\left(a + (n-1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad S(a,\varphi,n) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)\sin\left(a + (n-1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On pourra pour cela évaluer $C(a,\varphi,n) + i\,S(a,\varphi,n)$.

Partie I

On pose $\alpha = \frac{\pi}{5}$

1. Montrer que $\cos(\alpha) + \cos(3\alpha) = \frac{1}{2}$ à l'aide du préliminaire et de l'annexe 1.
2. En linéarisant $\cos(\alpha)\cos(3\alpha)$, montrer que $\cos(\alpha)\cos(3\alpha) = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha) + \cos(3\alpha))$.
   On exprimera $\cos(2\alpha)$ et $\cos(4\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\cos(3\alpha)$
3. En déduire la valeur de $\cos(\alpha)$ à l'aide de l'annexe 2.

Partie II

1. Dans cette question, et les suivantes, θ désigne le réel $\frac{\pi}{17}$.
   On pose :
   $$x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$
   $$x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$
   a. Montrer que $x_1 > 0$.
   b. Montrer que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ en s'aidant du préliminaire.
   c. Calculer le produit $x_1 x_2$. On devra pour cela :
      i. Développer le produit des deux sommes x_1 et x_2.
      ii. Appliquer au résultat obtenu la formule linéarisant le produit $\cos(a)\cos(b)$.
      iii. En conclure que $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$.
   d. Déduire de ce qui précède des expressions de x_1 et x_2 à l'aide de racines carrées.
2. On pose ici :
   $$y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$$
   $$y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$
   $$y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta)$$
   $$y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$$
   a. Calculer, en s'inspirant de la question précédente les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.
   b. En déduire les expressions de y_1, y_2, y_3 et y_4 à l'aide de racines carrées.
3. Calculer $\cos(\theta)\cos(13\theta)$. Et expliquer comment on pourrait trouver $\cos(\theta)$, c'est trop long à faire le calcul entier en temps limité.

Annexe :

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Cela s'appelle linéariser $\cos(a)\cos(b)$.

$$\sin(a)\cos(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$$

2. Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, on pose $p = ab$ et $s = a + b$ alors a et b sont les deux solutions de l'équation

$$X^2 - sX + p = 0$$

3.

$$\cos(2\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{15\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{15\pi}{17}\right) = -\cos(15\theta)$$

$$\cos(4\theta) = \cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{13\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{13\pi}{17}\right) = -\cos(13\theta)$$

$$\cos(6\theta) = \cos\left(\frac{6\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{6\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{11\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{11\pi}{17}\right) = -\cos(11\theta)$$

$$\cos(8\theta) = \cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{8\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{9\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{9\pi}{17}\right) = -\cos(9\theta)$$

$$\cos(10\theta) = \cos\left(\frac{10\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{10\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{7\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{17}\right) = -\cos(7\theta)$$

$$\cos(12\theta) = \cos\left(\frac{12\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{12\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{5\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{17}\right) = -\cos(5\theta)$$

$$\cos(14\theta) = \cos\left(\frac{14\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{14\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{3\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) = -\cos(3\theta)$$

$$\cos(16\theta) = \cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{16\pi}{17} - \pi\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = -\cos(\theta)$$

$$\cos(18\theta) = \cos\left(\frac{18\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = -\cos(\theta)$$

$$\cos(20\theta) = \cos\left(\frac{20\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) = -\cos(3\theta)$$

$$\cos(22\theta) = \cos\left(\frac{22\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{17}\right) = -\cos(5\theta)$$

$$\cos(24\theta) = \cos\left(\frac{24\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{17}\right) = -\cos(7\theta)$$

$$\cos(26\theta) = \cos\left(\frac{26\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{9\pi}{17}\right) = -\cos(9\theta)$$

$$\cos(28\theta) = \cos\left(\frac{28\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{17} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{11\pi}{17}\right) = -\cos(11\theta)$$