Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 1
CCP DS1 4 octobre 2017

Dans tout le problème, $(\mathcal{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln(x)$ représentant le logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O.

Question préliminaire : tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.

Partie A

1.
   a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C})$ au point I, de l'axe (Ox) d'abscisse 1.
   b. Etudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
   $$f(x) = x - 1 - \ln(x).$$
   c. En déduire la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).
2.
   a. Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   b. Soit $x \in]0, +\infty[$ et M et N les points de même abscisse x des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ respectivement. Déterminer la plus petite valeur prise par la distance MN lorsque x décrit $]0, +\infty[$.

Partie B

1. Soit $x \in]0, +\infty[$ et M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathcal{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.
2. Etude de la fonction auxiliaire u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x^2 + \ln(x)$:
   a. Justifier les limites de u en 0 et $+\infty$ ainsi que le sens de variation de u.
   b. Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$. Puis montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

   Déterminer le signe de $u(x)$ lorsque x parcourt $]0, +\infty[$.
3. Etude de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln(x))^2$:
   Calculer g' et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x}u(x)$.
   En déduire le tableau de variation de g.
4. Déduire des questions précédentes montrer que la valeur de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(\mathcal{C})$ est $\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
5. A étant le point d'abscisse α de $(\mathcal{C})$, démontrer que la tangente à $(\mathcal{C})$ en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C. Etude d'une suite.

1. Montrer que le réel α défini dans la partie B est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln(x))$$
2.
   a. Calculer h' et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   b. Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c. Calculer h'' et étudier son signe sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

d. En déduire que pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a

$$0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$$

3. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = h(u_n).$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.

b. Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tels que $a < b$. Grâce à une intégration, montrer que $h(b) - h(a) \leq 0{,}3(b-a)$.

c. Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que $|h(b) - h(a)| \leq 0{,}3|b - a|$.

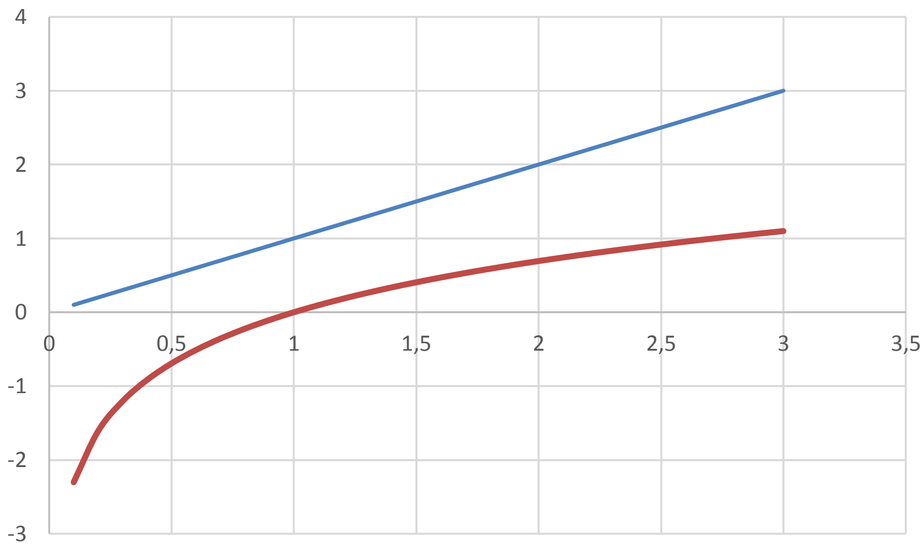
d. Montrer que l'on a pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3|u_n - \alpha|$:

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n$$

e. En déduire que (u_n) converge vers α.

Correction

Question préliminaire



Partie A

1.

a. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y - \ln(1) = \ln'(1)\,(x-1)$, on a :

$$y = x - 1$$

b. Pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Donc pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante et pour tout $x \in]1, +\infty[$ $f'(x) > 0$ et la fonction est croissante. La courbe admet un minimum au point d'abscisse 1, ce minimum vaut $f(1) = 0$.

c. D'après la question précédente pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$, ce qui montre que (Δ) est au-dessus de $(\mathcal{C})$.

2.

a. $x - \ln(x) = f(x) + 1 \geq 1$ ce minimum étant atteint pour $x = 1$.

b. $MN = x - \ln(x)$ admet comme plus petite valeur 1.

Partie B

1. M a pour coordonnées $(x, \ln(x))$, donc $OM = \sqrt{x^2 + (\ln(x))^2}$
2.
   a. En 0, $\lim_{x\to 0}(x^2 + \ln(x)) = -\infty$ et en $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + \ln(x)) = +\infty$

   Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $u'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ (car $x > 0$) donc u est strictement croissante.

   b. u est donc une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, 0 admet donc un unique antécédent $\alpha \in]0, +\infty[$.
$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln(2)$$
   Comme $\ln(2) \approx 0{,}693$ on a $u\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
$$u(1) = 1^2 - \ln(1) = 1 > 0$$
   Ce qui montre que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

   u est strictement croissante donc pour tout $x \in]0, \alpha[, u(x) < 0$ et pour tout $x \in]0, +\infty[, u(x) > 0$.
3. Remarque $g(x) = OM^2$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$:
$$g'(x) = 2x + \frac{2\ln(x)}{x} = \frac{2}{x}(x^2 + \ln(x)) = \frac{2}{x}u(x)$$
$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La plus courte distance entre l'origine et la courbe $(\mathcal{C})$ est la racine carrée de du minimum de g, c'est-à-dire
$$\sqrt{g(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + (\ln(\alpha))^2}$$
   Comme $u(\alpha) = 0$, cela entraine que $\alpha^2 + \ln(\alpha) = 0$, on peut arranger l'expression ci-dessus
$$\sqrt{g(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + ((-\alpha)^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}, \text{car } \alpha > 0$$
5. L'équation de la tangente en A est : $y = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln(\alpha)$.

   L'équation de la droite (OA) est : $y = \frac{\ln(\alpha)}{\alpha}x$

   Le produit des coefficient directeur est : $\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} = -1$, ce qui montre que ces deux droites sont orthogonales. (car $\ln(\alpha) = -\alpha^2$ puisque α est solution de $u(x) = 0$).

Partie C

1. $h(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x^2 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$.
2.
   a. Pour tout $x \in]0, +\infty[$
$$h'(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4x} = \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x} = \frac{-2x^2 + 4x - 1}{4x}$$
   a le même signe que $-2x^2 + 4x - 1$

   Le discriminant du numérateur vaut $\Delta = 16 - 8 = 8$, ses racines sont donc
$$x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{-4} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
   Pour tout $x \in]x_2, x_1[$, $-2x^2 + 4x - 1 > 0$, comme $1 < 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et que $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} < \frac{1}{2}$,

x	0		$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+4x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	

ce qui montre que pour tout $x \in \left]\frac{1}{2},1\right[$, $h'(x) > 0$.

b.

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\ln(2) - \frac{1}{4}\right)$$

Comme $\ln(2) > \frac{1}{4}$, on a $h\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$.

$$h(1) = 1 - \frac{1}{4}(1 + \ln(1)) = 1 - \frac{1}{4} < 1$$

D'après la question 2.a. h est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ donc

$$h\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) = \left[h\left(\frac{1}{2}\right), h(1)\right] \subset \left[\frac{1}{2},1\right].$$

c. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$

$$h''(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{-2x^2+1}{4x^2}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Car $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$

Si $x \in \left[\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ alors $h''(x) > 0$ et si $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ alors $h''(x) < 0$.

d.

$$h'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad h'(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Le minimum est donc $\frac{1}{4}$ et le maximum se situe en

$$h'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0{,}3$$

Car $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0{,}7$.

On a bien pour tout $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, $0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$.

3.

a. Par récurrence, $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$, puis on va montrer que si $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

$$u_{n+1} = h(u_n)$$

D'après 2.b. si $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ alors $h(x) \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, comme $u_n \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ alors $h(u_n) \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, ce qui achève la récurrence.

$$u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n = u_n - \frac{1}{4}(u_n^2 + \ln(u_n)) - u_n = -\frac{1}{4}(u_n^2 + \ln(u_n)) = -\frac{1}{4}u(u_n)$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n > \alpha$, c'est vrai pour $n = 0$, montrons que $u_n > \alpha$ entraine que $u_{n+1} > \alpha$

$$u_{n+1} - \alpha = h(u_n) - h(\alpha)$$

Comme $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $h'(x) > 0$ (d'après C.2.a.), h est croissante donc $h(u_n) > h(\alpha)$, ce qui achève cette récurrence, puis comme u est croissante (d'après B.2.b.) $\alpha < u_n$ entraine que $u(u_n) > u(\alpha) = 0$. $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}u(u_n) < 0$

Donc la suite est décroissante.

b. D'après 2.d. pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$0 \leq h'(x) \leq 0,3$$

Donc pour tout $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\int_a^b 0 \times dx \leq \int_a^b h'(x)dx \leq \int_a^b 0,3 \times dx$$

Ce qui équivaut à

$$0 \leq h(b) - h(a) \leq 0,3(b - a)$$

L'inégalité de droite donne le résultat demandé.

c. Si $a < b$ alors d'après 3.b.

$$0 \leq h(b) - h(a) \leq 0,3(b - a) \Rightarrow |h(b) - h(a)| \leq 0,3|b - a|$$

Si $b < a$ alors d'après 3.b.

$$0 \leq h(a) - h(b) \leq 0,3(a - b) \Rightarrow |h(a) - h(b)| \leq 0,3|a - b| \Rightarrow |h(b) - h(a)| \leq 0,3|b - a|$$

d. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, d'après 3.c.

$$|h(u_n) - h(\alpha)| \leq 0,3|u_n - \alpha|$$

Car d'après B.2.b. $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, puis on a $h(\alpha) = \alpha$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ ce qui entraine que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3|u_n - \alpha|$$

Par récurrence, pour $n = 0$

$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = 1 - \alpha < \frac{1}{2}$$

Car $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Il reste à montrer que l'inégalité au rang n entraine celle au rang $n + 1$.

$$|u_{n+1} - \alpha| = |h(u_n) - h(\alpha)| \leq 0,3|u_n - \alpha| = 0,3 \times \frac{1}{2} \times (0,3)^n = \frac{1}{2}(0,3)^{n+1}$$

Ce qui achève la récurrence.

e. La limite de $(0,3)^n$ en $+\infty$ est nulle donc

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

Autrement dit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$