Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 1
CCP DS1 4 octobre 2017

Dans tout le problème, $(\mathcal{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln(x)$ représentant le logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O.

Question préliminaire : tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.

Partie A

1.
   a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C})$ au point I, de l'axe (Ox) d'abscisse 1.
   b. Etudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
   $$f(x) = x - 1 - \ln(x).$$
   c. En déduire la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).
2.
   a. Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   b. Soit $x \in]0, +\infty[$ et M et N les points de même abscisse x des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ respectivement. Déterminer la plus petite valeur prise par la distance MN lorsque x décrit $]0, +\infty[$.

Partie B

1. Soit $x \in]0, +\infty[$ et M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathcal{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.
2. Etude de la fonction auxiliaire u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x^2 + \ln(x)$:
   a. Justifier les limites de u en 0 et $+\infty$ ainsi que le sens de variation de u.
   b. Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$. Puis montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

   Déterminer le signe de $u(x)$ lorsque x parcourt $]0, +\infty[$.
3. Etude de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln(x))^2$:
   Calculer g' et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x} u(x)$.
   En déduire le tableau de variation de g.
4. Déduire des questions précédentes montrer que la valeur de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(\mathcal{C})$ est $\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
5. A étant le point d'abscisse α de $(\mathcal{C})$, démontrer que la tangente à $(\mathcal{C})$ en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C. Etude d'une suite.

1. Montrer que le réel α défini dans la partie B est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :
   $$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln(x))$$
2.
   a. Calculer h' et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   b. Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c. Calculer h'' et étudier son signe sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

d. En déduire que pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a

$$0 \leq h'(x) \leq 0{,}3$$

3. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = h(u_n).$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.

b. Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tels que $a < b$. Grâce à une intégration, montrer que $h(b) - h(a) \leq 0{,}3(b - a)$.

c. Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que $|h(b) - h(a)| \leq 0{,}3|b - a|$.

d. Montrer que l'on a pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3|u_n - \alpha|$:

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n$$

e. En déduire que (u_n) converge vers α.