Université Claude Bernard Lyon 1 — Semestre automne 2017 - 2018

Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - Corrigé DS n°3

PARTIE COMMUNE

<u>Exercice 1 :</u> *Questions de cours*

$\longrightarrow$ Voir Cours + TD

<u>Exercice 2 :</u> On considère un nombre complexe $\omega = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $z = \dfrac{\omega - i}{\omega + i}$. Montrer que :

$$Re(z) = \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1 + 2b} \qquad , \qquad Im(z) = \frac{-2a}{|\omega|^2 + 1 + 2b}\,.$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\omega - i}{\omega + i} = \frac{(\omega - i)(\bar{\omega} - i)}{(\omega + i)(\bar{\omega} - i)} \\ &= \frac{|\omega|^2 - i\,(\omega + \bar{\omega}) - 1}{|\omega|^2 + i\,(\bar{\omega} - \omega) + 1} \\ &= \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1 + 2b} + i\frac{-2a}{|\omega|^2 + 1 + 2b}\,. \end{aligned}$$

2. Montrer que $(|\omega|^2 - 1)^2 + (2a)^2 < (|\omega|^2 + 1)^2$.

$$\begin{aligned} (|\omega|^2 - 1)^2 + (2a)^2 &< (|\omega|^2 - 1)^2 + (2a)^2 + (2b)^2 \\ &< (|\omega|^2 - 1)^2 + 4|\omega|^2 = |\omega|^4 + 2|\omega|^2 + 1 \\ &< (|\omega|^2 + 1)^2\,. \end{aligned}$$

3. En déduire que $|z| < 1$.

$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = \dfrac{|\omega|^2 - 1)^2 + (2a)^2}{(|\omega|^2 + 1 + 2b)^2}$.

On sait que $b > 0,$ donc $(|\omega|^2 + 1 + 2b)^2 > (|\omega|^2 + 1)^2 > 0$.

On aboutit à : $|z|^2 < \dfrac{|\omega|^2 - 1)^2 + (2a)^2}{(|\omega|^2 + 1)^2} < 1\,,$ d'après la question précédente.

<u>Exercice 3 :</u> Soit $\mathbb{P} := \{\omega \in \mathbb{C}\,,\, Im(\omega) > 0\}$ et $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| < 1\}$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ \omega &\longmapsto \frac{\omega - i}{\omega + i} \end{aligned}$$

1. Déduire de l'**exercice 2** que Φ est bien définie (*i.e.* $\Phi(\omega) \in \mathbb{D}$ pour tout $\omega \in \mathbb{P}$).

Soit $\omega \in \mathbb{P}.\, \omega$ s'écrit alors sous la forme $\omega = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
L'exercice précédent donne alors immédiatement que $z = \dfrac{\omega - i}{\omega + i} = \Phi(w)$ vérifie $|z| < 1$,
c'est à dire $\Phi(w) \in \mathbb{D}$.

2. Montrer que Φ est injective.

Soit $\omega, \omega' \in \mathbb{P}$ tels que $\Phi(w) = \Phi(w')$.

$$\begin{aligned} \Phi(w) = \Phi(w') &\Leftrightarrow \frac{\omega - i}{\omega + i} = \frac{\omega' - i}{\omega' + i} \\ &\Leftrightarrow (\omega - i)(\omega' + i) = (\omega' - i)(\omega + i) \\ &\Leftrightarrow i(\omega - \omega') = i(\omega' - \omega) \\ &\Leftrightarrow \omega = \omega'\,. \end{aligned}$$

3. Soit z un nombre complexe vérifiant $|z| < 1$.

   Déterminer la partie imaginaire du complexe $\omega = i\left(\frac{z+1}{1-z}\right)$. En déduire que $\omega \in \mathbb{P}$.

   $\omega = i\left(\frac{z+1}{1-z}\right) = i\left(\frac{(z+1)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})}\right) = i\left(\frac{-|z|^2 + 2iIm(z) + 1}{|1-z|^2}\right)$.

   On en déduit : $Im(w) = \left(\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) > 0$, donc $w \in \mathbb{P}$.

4. Déduire de ce qui précède que Φ est bijective.

   On a déjà établi que Φ était injective. Il suffit donc de montrer qu'elle est surjective.
   Soit $z \in \mathbb{D}$. On cherche un antécédent à z, c'est à dire un $\omega \in \mathbb{P}$ tel que $\Phi(\omega) = z$.
   La question précédente montre que le complexe $\omega = i\left(\frac{z+1}{1-z}\right)$ est un élément de $\mathbb{P}$.
   On vérifie aisément que $\Phi(\omega) = z$.

<u>Exercice 4 :</u> Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $z^k + \bar{z}^k$ en fonction de k, ρ et θ.

   On a $z = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.
   Donc $z^k + \bar{z}^k = \rho^k e^{ik\theta} + \rho^k e^{-ik\theta} = \rho^k\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) = 2\rho^k \cos(k\theta)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n}\left(z^k + \bar{z}^k\right) = 2^{n+1}\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=0}^{n}\cos(k\theta).$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}\left(z^k + \bar{z}^k\right) &= \prod_{k=0}^{n}\left(2\rho^k\cos(k\theta)\right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{n}2\right) \times \left(\prod_{k=0}^{n}\rho^k\right) \times \left(\prod_{k=0}^{n}\cos(k\theta)\right) \\
&= 2^{n+1} \times \rho^{(\sum_{k=0}^{n}k)} \times \left(\prod_{k=0}^{n}\cos(k\theta)\right) \\
&= 2^{n+1}\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=0}^{n}\cos(k\theta)
\end{aligned}$$

<u>Exercice 5 (bonus)</u> *1 point supplémentaire par question.*

On considère les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x^2) \end{array} .$$

1. La fonction f est elle injective ? surjective ? bijective ?

   • $f(0,1) = f(0,0) = 0$: f n'est pas injective (et donc pas bijective).
   • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f(1,\lambda) = \lambda$. On en déduit que f est surjective.

2. La fonction g est elle injective ? surjective ? bijective ?

   • $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(x') \Rightarrow (x, x^2) = (x', x'^2) \Rightarrow x = x'$. g est donc injective.
   • L'élément $(0,-1) \in \mathbb{R}^2$ n'admet pas d'antécédent par g.
   On en déduit que g n'est pas surjective (et donc pas bijective).

3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
4. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$\bullet\, \forall x \in \mathbb{R},\ f \circ g(x) = f(x, x^2) = x^3$.
La fonction réelle $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ est bijective (cours).
$\bullet\, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g \circ f(x,y) = g(xy) = (xy, (xy)^2)$.
Cette fonction n'est pas surjective pour les mêmes raisons que g.
Cette fonction n'est pas injective car $g \circ f(0,1) = g \circ f(0,0) = (0,0)$.