Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2017 - 2018
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°3
PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre (il est toutefois recommandé d'aborder l'exercice 2 avant l'exercice 3). Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* ***pas autorisées****.*

Exercice 1 : *Questions de cours*

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.
2. On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) de limites respectives ℓ et ℓ'. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ admet pour limite $\ell + \ell'$.

Exercice 2 : On considère un nombre complexe $\omega = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $z = \dfrac{\omega - i}{\omega + i}$. Montrer que :
$$Re(z) = \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1 + 2b} \qquad , \qquad Im(z) = \frac{-2a}{|\omega|^2 + 1 + 2b}.$$
2. Montrer que $(|\omega|^2 - 1)^2 + (2a)^2 < (|\omega|^2 + 1)^2$.
3. En déduire que $|z| < 1$.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{P} := \{\omega \in \mathbb{C}\,,\, Im(\omega) > 0\}$ et $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| < 1\}$. On considère l'application :
$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & \omega & \longmapsto & \dfrac{\omega - i}{\omega + i}. \end{array}$$

1. Déduire de l'**exercice 2** que Φ est bien définie (*i.e.* $\Phi(\omega) \in \mathbb{D}$ pour tout $\omega \in \mathbb{P}$).
2. Montrer que Φ est injective.
3. Soit z un nombre complexe vérifiant $|z| < 1$.
Déterminer la partie imaginaire du complexe $\omega = i\left(\dfrac{z+1}{1-z}\right)$. En déduire que $\omega \in \mathbb{P}$.
4. Déduire de ce qui précède que Φ est bijective.

Exercice 4 : Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $z^k + \bar{z}^k$ en fonction de k, ρ et θ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n} \left(z^k + \bar{z}^k \right) = 2^{n+1} \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \,.$$

<u>**Exercice 5 (bonus)**</u> *1 point supplémentaire par question.*

On considère les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x^2) \end{array} \,.$$

1. La fonction f est elle injective ? surjective ? bijective ?
2. La fonction g est elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
4. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?