Exercice 1

1) $D_n = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. 0,5

2) Sur D_n la fonction f_n est produit, quotient de fonctions usuelles continues et dérivables, donc par les théorèmes généraux f_n est continue et dérivable sur D_n. 1

$$\left(f_0(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} \Rightarrow f_0'(x) = \frac{1/x\,(x^2-1) - 2x\ln x}{(x^2-1)^2} = \frac{x(1-2\ln x) - 1/x}{(x^2-1)^2} \right)$$

$$f_n(x) = \frac{x^n \ln x}{x^2-1} \Rightarrow f_n'(x) = \frac{(n x^{n-1}\ln x + x^{n-1})(x^2-1) - x^n \ln x\,(2x)}{(x^2-1)^2}$$

1,5

$$= \frac{x^{n+1}(1+(n-2)\ln x) - x^{n-1}(n\ln x + 1)}{(x^2-1)^2}$$

3) $x = 1+h$

$$f_n(x) = \frac{(1+h)^n \ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \frac{\left(1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+o(h^2)\right)\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)\right)}{2h+h^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+o(h^2)\right)\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)\right)\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+nh-\frac{n}{2}h^2+\frac{n(n-1)}{2}h^2+o(h^2)\right)\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+nh-\frac{n}{2}h^2+\frac{n(n-1)}{2}h^2-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}-\frac{n}{2}h+\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+(n-1)h+h^2\left(\frac{1}{3}-n+\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+(n-1)h+\frac{3n^2-9n+5}{6}h^2+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}h+\frac{3n^2-9n+5}{12}h^2+o(h^2).$$

$$f_n(x) = \frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}(x-1)+\frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2+o((x-1)^2).$$ 3

4) $\lim_{x\to 1} f_n(x) = 1/2$ donc f_n est prolongeable par continuité en 1 avec $f_n(1) = \frac{1}{2}$. 0,5

5) f_n admet un DL_1 en $x=1$, donc elle est dérivable en 1. Et $f_n'(1) = \frac{n-1}{2}$. 1,5

0,5

6) $y = \frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}(x-1)$.

Il faut regarder le signe de $3n^2-9n+5$.

$\Delta = 21 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9\pm\sqrt{21}}{6}$ $\quad 4<\sqrt{21}<5$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{13}{6} \le \frac{9+\sqrt{21}}{6} \le \frac{14}{6} \\ \frac{4}{6} \le \frac{9-\sqrt{21}}{6} \le \frac{5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} n=0 & + & \Gamma_{f_n} \text{ au dessus} \\ n=1,2 & - & \Gamma_{f_n} \text{ en dessous} \\ n\geq 3 & + & \Gamma_{f_n} \text{ au dessus.} \end{array}\right.$$ 2

7) Pour $n \geq 1$, $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n$ prolongeable par $f_n(0) = 0$ 1

0,5

Pour $n = 0$, $\lim_{x \to 0^+} f_0(x) = +\infty$, non prolongeable.

Pour $n \geq 1$ on regarde $\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{n-1} \ln x}{x^2 - 1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ +\infty & \text{si } n = 1. \end{cases}$

Donc f_n dérivable à dte en 0 si $n \geq 2$, $f_n'(0) = 0$ 1,5

$\boxed{13,5}$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

1) Déc. en éléments simples, sans partie entière :

$$\frac{X^p}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

$$Q(X) = \prod (X - a_i), \quad Q'(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (X - a_j), \quad Q'(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$$

$$\frac{X^p}{\prod_{j \neq i} (X - a_j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X - a_j} (X - a_i) \Rightarrow \frac{a_i^p}{Q'(a_i)} = \lambda_i$$ 2

2) On multiplie par X : $\frac{X^{p+1}}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i X}{X - a_i}$ 2

et on fait $X \to +\infty$, ce qui donne $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{Q'(a_i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p+1 < n \\ 1 & \text{si } p+1 = n. \end{cases}$

3) $\frac{1}{Q(X)} = \frac{X^0}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - a_i}$ avec $\lambda_i = \frac{1}{Q'(a_i)}$. 0,5

4) $\frac{1}{Q(0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{-a_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i Q'(a_i)}$ 1

5) $Q''(X) = \sum \alpha_k X^k \Rightarrow \frac{Q''}{Q} = \sum \alpha_k \frac{X^k}{Q}$. On applique 1) : dans la décomp. en éléments simples on va trouver $\lambda_i = \sum_k \alpha_k \frac{a_i^k}{Q'(a_i)} = \frac{Q''(a_i)}{Q'(a_i)}$ 1

6) $$\frac{Q''(X)}{Q(X)} = \sum_i \frac{Q''(a_i)}{Q'(a_i)} \frac{1}{X - a_i}$$

$$\frac{XQ''}{Q} = \sum \frac{Q''(a_i)}{Q'(a_i)} \frac{X}{X - a_i}, \quad X \to +\infty : \quad 0 = \sum \frac{Q''(a_i)}{Q'(a_i)}$$ 2

$\boxed{8,5}$