

Fondamentaux des Mathématiques II

D.S. 1

28/02/2018

1 Exercice 1 (\simeq 13 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction

$$f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{x^2 - 1}.$$

- 1) Précisez le domaine de définition D_n de f_n .
- 2) Montrez que f_n est continue et dérivable sur D_n . Calculez la dérivée de f_n sur D_n .
- 3) Déterminez le développement limité à l'ordre 2 de f_n au voisinage de 1.
- 4) Montrez que f_n est prolongeable par continuité en 1. Pour quelle valeur de $f(1)$?
- 5) Montrez que f_n est dérivable en 1. Quelle est sa dérivée en 1 ?
- 6) Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f_n au point $x = 1$? Comment est positionnée cette tangente par rapport au graphe de f ?
- 7) Est-ce que f_n est prolongeable par continuité en 0 ? Est ce que f est dérivable à droite en 0 ? Pour quelle valeur de dérivée à droite ?

2 Exercice 2 (\simeq 9 points)

Soient a_1, \dots, a_n des nombres réels 2 à 2 distincts. On pose

$$Q(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_i).$$

1) Montrez que, pour $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ on a

$$\frac{X^p}{Q(X)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

avec

$$\lambda_i = \frac{a_i^p}{Q'(a_i)}.$$

2) En déduire la valeur de

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{Q'(a_i)}.$$

3) Trouvez la décomposition en éléments simples de $1/Q(X)$.

4) Montrez que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k Q'(a_k)} = -\frac{1}{Q(0)}.$$

5) Donnez la décomposition en éléments simples de Q''/Q .

6) Montrez que

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q''(a_i)}{Q'(a_i)} = 0.$$