Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Cursus prépa-Première année

Le 18 octobre 2017

Fondamentaux des mathématiques-DS n°2

Exercice 1. Soir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application

1. Montrer que si f est strictement décroissante alors f est injective.
2. Montrer que la réciproque est fausse, pour cela, on donnera une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit pas strictement décroissante.

Correction exercice 1. 3 points+3 points=6 points

1. La contraposée de f est injective est :
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
Si f est strictement décroissante et si $x_1 \neq x_2$ alors, soit $x_1 < x_2$ et alors $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$, soit $x_1 > x_2$ et alors $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui montre que f est injective.
2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et par $f(0) = 0$
$$f(-2) = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} = f(2) \quad \text{et} \quad -2 < 2$$
Ce qui montre que f n'est pas strictement décroissante.

Exercice 2.

1. Le but est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:
$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
   a. On pose :
   $$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
   Montrer que ces deux fonctions ont la même dérivée.

   b. En faisant tendre x vers $+\infty$ trouver la constante qui relie ces deux fonctions.
2. Calculer
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$
3. En déduire
$$\lim_{n \to +\infty} S_n$$

Correction exercice 2. (2 points+4 points)+2 points+4 points ; 2. 3 points ; 3. 1 points=16 points

1.
   a. Pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^3}}{1 + \left(\frac{1}{2x^2}\right)^2} = \frac{-1}{x^3\left(1 + \frac{1}{4x^4}\right)} = \frac{-4x}{4x^4 + 1}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} - \frac{\frac{x-(x-1)}{x^2}}{1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2}} - \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2 + (x-1)^2}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 1 - (2x^2 + 2x + 1)}{(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{-4x}{(2x^2 + 1 + 2x)(2x^2 + 1 - 2x)}$$

$$= \frac{-4x}{(2x^2+1)^2 - (2x)^2} = \frac{-4x}{4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2} = \frac{-4x}{4x^4 + 1} = f'(x)$$

b. Les deux dérivées sont égales sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = g(x) + K$$

Pour $x \to +\infty$, $f(x) \to \arctan(0) = 0$ et $g(x) \to \arctan(1) - \arctan(1) = 0$, donc $K = 0$.
On en déduit que pour tout $x > 0$

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

2.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k'=2}^{n+1} \arctan\left(\frac{k'-1}{k'}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

En posant $k' = k + 1$ dans la première somme

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Car il s'agit d'une somme télescopique.

3. Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{n}{n+1} \to 1$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Pour $k \in [\![1, 2n]\!]$, soient $a_k \in \mathbb{R}$. Vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

3. Déduire de 1. et de 2. la valeur de

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}k^2$$

Correction exercice 3. 3 points+(1point+5 points)+3 points=12 points

1. Pour $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1}k^2=1 \quad \text{et} \quad \frac{1(1+1)(2+1)}{6}=6$$

L'égalité est vraie pour $n=1$, il faut montrer que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}[n(2n+1)+6(n+1)]$$

$$=\frac{n+1}{6}[2n^2+7n+6]$$

Le discriminant du polynôme $2X^2+7X+6$ est $\Delta=49-4\times 2\times 6=1$, ses racines sont :

$$X_1=\frac{-7-1}{4}=-2 \quad et \quad X_2=\frac{-7+1}{4}=-\frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$2X^2+7X+6=2(X+2)\left(X+\frac{3}{2}\right)=(X+2)(2X+3)$$

Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)=\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Ce qui achève la récurrence donc pour tout $n\geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Pour voir ce que cela donne

$$\sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{2n}a_i=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}=(a_2+a_4+\cdots+a_n)+(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}+\sum_{k=0}^{n}a_{2k-1}$$

Pour $n=1$

$$\sum_{k=1}^{2\times 1}a_k=a_1+a_2=\sum_{i=1}^{1}a_{2k}+\sum_{i=1}^{1}a_{2k-1}=a_2+a_1$$

L'équation est vraie pour $n=1$

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} a_k = \sum_{k=1}^{2n+2} a_k = \sum_{k=1}^{2n} a_k + a_{2n+1} + a_{2n+2} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + a_{2n+1} + a_{2n+2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + a_{2n+2} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + a_{2n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{2k} + \sum_{i=1}^{n+1} a_{2k-1}$$

Ce qui achève la récurrence.

D'après l'égalité ci-dessus, avec $a_k = k^2$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2$$

Ce qui équivaut à

$$4\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{2n(2n+1)(2\times 2n+1)}{6}$$

En appliquant le 1. à "$2n$" au lieu de n, par conséquent

$$4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{n(2n+1)[(4n+1)-2(n+1)]}{3}$$
$$= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

Autre méthode

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k^2-4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 12\frac{n(n+1)}{6} + \frac{6n}{6}$$
$$= n\frac{4(n+1)(2n+1)-12(n+1)+6}{6} = n\frac{4(2n^2+3n+1)-12n-12+6}{6} =$$
$$= n\frac{8n^2+12n+4-12n-12+6}{6} = n\frac{8n^2-2}{6} = n\frac{4n^2-1}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

3. D'après 1. Appliquer à $a_k = (-1)^{k-1}k^2$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k-1}(2k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k+1-1}(2k-1)^2 = -\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 + \sum_{i=1}^{n} (2k-1)^2$$
$$= -4\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = -4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$
$$= -2\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$
$$= \frac{n(2n+1)}{3}(-2(n+1)+2n-1)) = \frac{n(2n+1)}{3}\times(-3) = -n(2n+1)$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{kx} = e^{\frac{n}{2}x} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

2. Soient

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx)$$

Montrer que pour tout $x \neq 0$

$$C_n(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

Correction exercice 4. 4 points+4 points

1. Pour tout $x \neq 0$, $e^x \neq 1$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} = \frac{e^{\frac{n+1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}} \times \frac{e^{-\frac{n+1}{2}x} - e^{\frac{n+1}{2}x}}{e^{-\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x}}$$

$$= e^{\frac{n}{2}x} \times \frac{-2\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)} = e^{\frac{n}{2}x} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

2.

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{kx} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \frac{1}{2}A(x) + \frac{1}{2}A(-x)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{n}{2}x} \times \frac{\operatorname{s}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}x} \times \frac{\operatorname{sh}\left(-\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{n}{2}x} \times \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}x} \times \frac{-\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{n}{2}x} \times \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}x} \times \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{e^{\frac{n}{2}x} + e^{-\frac{n}{2}x}}{2} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(kx)=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}e^{kx}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}e^{-kx}=\frac{1}{2}A(x)-\frac{1}{2}A(-x)$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{n}{2}x}\times\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}-\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}x}\times\frac{\operatorname{sh}\left(-\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{n}{2}x}\times\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}-\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}x}\times\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}=\frac{e^{\frac{n}{2}x}-e^{-\frac{n}{2}x}}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$=\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$