Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Cursus prépa-Première année

Le 18 octobre 2017

Fondamentaux des mathématiques-DS n°2

Exercice 1. Soir $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application

1. Montrer que si f est strictement décroissante alors f est injective.
2. Montrer que la réciproque est fausse, pour cela, on donnera une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit pas strictement décroissante.

Exercice 2.

1. Le but est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:
$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
   a. On pose :
$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
   Montrer que ces deux fonctions ont la même dérivée.

   b. En faisant tendre x vers $+\infty$ trouver la constante qui relie ces deux fonctions.
2. Calculer
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$
3. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} S_n$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer par récurrence que :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
2. Pour $k \in [\![1,2n]\!]$, soient $a_k \in \mathbb{R}$. Vérifier que :
$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$$
   En déduire la valeur de
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$$
3. Déduire de 1. et de 2. la valeur de

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k^2$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{kx} = e^{\frac{n}{2}x} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

2. Soient

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx)$$

Montrer que pour tout $x \neq 0$

$$C_n(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$