Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 1

Feuille d'exercices 10 bis
Limites et continuité

Complément sur les limites, continuité et dérivabilité.

Exercice 1.

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ dans $[a, b]$

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a :
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$, tel que $f(x) = x$.
2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ $x \neq y$ on a :
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$
Montrer qu'il existe un unique $x \in [a, b]$, tel que $f(x) = x$

Exercice 2.

1. Soit (H_p) la proposition suivante.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$
Montrer (H_p) par récurrence sur p.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite.
On pourra montrer que cette suite une suite de Cauchy.

Exercice 3.

Soit (u_n) une suite définie par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(n)}{3^n}$$
Montrer que cette suite est convergente

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x = 0 \\ x + \dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } \ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } \ x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ telle que $f'(c) = 0$. (on ne demande pas la valeur de c).

Exercice 5.

Soient a et b deux réels

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si} \quad x<0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\\ e^{bx}-x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

1. A l'aide de la règle de L'Hospital déterminer la limite suivante
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\,x-\sin(x)}{x^2}$$
2. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ tel que $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe un « petit » intervalle J autour de A, tel que pour tous $x \in J$, $f(x) > 0$.

Exercice 7.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, telle que $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$ et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$
Montrer qu'il existe $\alpha \in \,]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
On pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$

Exercice 8.

Soit f une application de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, que $f(0) = 0$ et que pour tout $x \in \,]0,1[$, on a $f'(x) \neq 0$.
Montrer que f conserve un signe constant sur $]0,1[$.

Exercice 9.

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continument dérivable sur $[0,1]$ (ce qui signifie que f est continue et dérivable sur $[0,1]$ et que f' est continue sur $[0,1]$).
On suppose de plus que $f(0) = 0$, et que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait :
$$f(x) \geq mx$$

Exercice 10.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $f(a) = f(b) = 0$, telle que f soit dérivable sur $]a,b[$ et telle que sa dérivée soit strictement décroissante, c'est-à-dire que la fonction f' est strictement décroissante.

1. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer si $t \in \,]a,c[$ alors $f'(t) > 0$ et que si $t \in \,]c,b[$ alors $f'(t) < 0$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $[a,c]$ et décroissante sur $[c,b]$. On pourra utiliser le théorème des accroissements finis (on fera attention au fait que f n'est pas dérivable en a et en b.
4. Montrer que f admet un maximum global en $x = c$.
5. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 11.

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$
On suppose f dérivable en 0 et en 1et que $f'(0) = f'(1) = 0$
Montrer qu'il existe $\alpha \in \,]0,1[$ tel que
$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$$
On pourra utiliser la fonction $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } \ x=0 \\ \dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{f(x)-1}{x-1} & \text{si } x\in]0,1[\\ 1 & \text{si } \ x=1 \end{cases}$$

En déduire que $f(\alpha)=\alpha$

Exercice 12.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue, on suppose que f est dérivable sur $]a,b[$, et que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)>0$.

Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)}=e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Exercice 13.

Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)<f(b)$.On suppose de plus que f est dérivable en a et en b et que $f'(a)=f'(b)=0$.

1. On pose
$$g(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
   i. Montrer que
   $$g(x)=f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
   ii. Montrer que g est dérivable en a et en b. Calculer $g'(a)$ et $g'(b)$.
   iii. En déduire qu'il existe $\eta>0$ tel que $\forall x\in]a,a+\eta], g(x)<0$ et qu'il existe $\eta'>0$ tel que $\forall x\in[b-\eta',b[, g(x)>0$
2. En déduire qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $g(c)=0$.
3. Montrer que
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$