Feuille 9. Limites et continuité des fonctions

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{3x-4}$ $\quad b)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ $\quad c)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ $\quad d)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right)$

$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ $\quad f)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+5}-x$ $\quad g)\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+5}-x$

$h)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$ $\quad i)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ $\quad j)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Exercice 2.

1. Quelle est la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$?
2. La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ admet-elle une limite en 0 ?
3. Calculez $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$ $\quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ $\quad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ $\quad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ $\quad e)\ \lim_{x\to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$

$f)\ \lim_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$ $\quad g)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ $\quad h)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$ $\quad i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$

$j)\ \lim_{x\to+\infty} \ln^2 x - \sqrt{x}$ $\quad k)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ $\quad l)\ \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln^3 x$ $\quad m)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n},\ n\in\mathbb{Z}$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 5. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.
4. $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2\sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 6. Soit $f :]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $x < 0$ et $f(x) = x - 1$ si $1 \leq x$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = y$ si $y < 0$ et $g(y) = y + 1$ si $0 \leq y$.

1. Tracer leurs graphes respectifs, et constater qu'ils se déduisent l'un de l'autre par une symétrie.
2. Ces applications sont-elles réciproques l'une de l'autre ?
3. Pour chacune de ces applications, préciser si elle est continue sur son domaine de définition.

Exercice 7. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 8. Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0$$

Exercice 9.

1. Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.
2. Donner un contre-exemple de polynôme à coefficients réels et de degré pair qui n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[0, 1]$ et telle que

$$0 \leq f(x) \leq 1\,, \qquad \forall x \in [0, 1]$$

Montrer qu'il existe au moins un point $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 11. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice 12. Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est injective et continue, alors elle est strictement monotone. Même question avec une fonction définie sur un intervalle quelconque.

Exercice 13. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.
2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$
Montrer qu'il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 14. Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Exercice 15. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. A l'aide de la valeur absolue, trouver une formule explicite qui calcule la fonction $\sup(f, g)$.
2. Montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f, g)$ l'est aussi.

Exercice 16. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 17. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. en supposant f continue,
2. en supposant f croissante,
3. en supposant f continue en 0.

Exercice 18.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}$$