Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2017-2018

Cursus prépa – Première année

Fondamentaux des Mathématiques – DS n° 1

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction.

1. Donner la définition d'une fonction bijective vue en cours, à l'aide des quantificateurs.
2. Donner la négation de la proposition P suivante :

$$(P) \qquad \forall y \in J\,,\ \exists x \in I \;\big|\; f(x) = y\,.$$

3. Donner la négation de la proposition Q suivante :

$$(Q) \qquad \forall y \in J\,,\ \Big(\big(\exists\, x_1\,,\, x_2 \in I \;\big|\; f(x_1) = y = f(x_2)\big) \Longrightarrow \big(x_1 = x_2\big)\Big)\,.$$

4. En utilisant les deux questions précédentes, traduire avec les quantificateurs la proposition "f n'est pas bijective".
5. Donner un exemple :
   – d'une fonction g qui vérifie $\big(\text{non}(P)\ \text{ et }\ Q\big)$ quand $I = J = \mathbb{R}$;
   – d'une fonction h qui vérifie $\big(P\ \text{ et }\ \text{non}(Q)\big)$ quand $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}_+ = \{y \geq 0\}$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 3x + 1}{e^x\, x^2}\right)\,.$$

1. Montrer que f est bien définie pour tout $x > 0$.
2. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Déterminer (s'il existe) le point d'intersection du graphe de f avec l'axe des ordonnées.
4. Donner le domaine de dérivabilité de f et montrer que, sur ce domaine, f' est donnée par la formule

$$f'(x) = -1 - \frac{3x + 2}{x\,(x^2 + 3x + 1)}\,.$$

   Dresser ensuite le tableau des variations de f.

5. Prouver que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
6. En déduire qu'il existe un unique $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$. Montrer ensuite que x_0 vérifie l'équation

$$(x_0)^2 \,+\, 3\,x_0 \,+\, 1 \,=\, e^{x_0}\,(x_0)^2\,.$$

7. Montrer que

$$f'(x_0) \;=\; -\left(1 \,+\, \frac{3}{(x_0)^2\,e^{x_0}} \,+\, \frac{2}{(x_0)^3\,e^{x_0}}\right)$$

et que la tangente à f au point x_0 est donnée par l'équation

$$y \,=\, -\left(1 \,+\, \frac{3}{(x_0)^2\,e^{x_0}} \,+\, \frac{2}{(x_0)^3\,e^{x_0}}\right) x \,+\, \left(x_0 \,+\, \frac{3}{x_0\,e^{x_0}} \,+\, \frac{2}{(x_0)^2\,e^{x_0}}\right).$$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2\,+\,5}} \,-\, \frac{n}{\sqrt{n^4\,+\,3n\,+\,1}}\right) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,\left(\sqrt{x^2\,+\,5x\,+\,3} \,-\, \sqrt{x^2\,+\,5x\,-\,3}\right)\right) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\!\left(e\,+\,x^2\right)\,-\,1}{x^2}\,. \tag{3}$$

Dans la limite (3), on remarquera que $1 = \ln e$.

Exercice 4. Soient $a < b$ deux nombres réels ; on définit l'intervalle $I = [a,b[$. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses : si elles sont vraies, les prouver ; si elles sont fausses, donner leur négation et la prouver.

1. $\forall x \in I\,,\ \exists\,\varepsilon > 0 \;\big|\; x + \varepsilon \in I$.
2. $\forall x \in I\,,\ \exists\,\varepsilon > 0 \;\big|\; x - \varepsilon \in I$.
3. $\forall\,\varepsilon > 0\,,\ \exists x \in I \;\big|\; x + \varepsilon \notin I$.
   Indication : séparer les cas $\varepsilon \geq b - a$ et $0 < \varepsilon < b - a$.
4. $\forall x \in I\,,\ \big(\forall\,\varepsilon > 0\,,\ x - \varepsilon \notin I\big) \implies x = a$.