**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre automne 2017-2018

Cursus prépa – Première année

---

**Fondamentaux des Mathématiques – DS n° 1**

Partie commune

---

**Exercice 1.** Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction.

1. $f$ est *bijective* si
$$\forall y \in J\,,\ \exists\,!\,x \in I \;\big|\; f(x) = y\,.$$

2. La négation de $P$ est :

non($P$) $$\exists\, y \in J \;\big|\; \forall x \in I\,,\ f(x)\ \neq\ y\,.$$

3. La négation de $Q$ est :

non($Q$) $$\exists\, y \in J \;\big|\; \Big(\big(\exists\, x_1\,,\, x_2\ \in I \;\big|\; f(x_1)\ =\ y\ =\ f(x_2)\big)\ \text{ et }\ \big(x_1\ \neq\ x_2\big)\Big)\,.$$

4. "$f$ n'est pas bijective" si
$$\Big(\exists\, y \in J \;\big|\; \forall x \in I\,,\ f(x)\ \neq\ y\Big)\ \text{ ou }$$
$$\Bigg(\exists\, y \in J \;\big|\; \Big(\big(\exists\, x_1\,,\, x_2\ \in I \;\big|\; f(x_1)\ =\ y\ =\ f(x_2)\big)\ \text{ et }\ \big(x_1\ \neq\ x_2\big)\Big)\Bigg)\,.$$

5. Ça suffit de prendre $g(x)\ =\ e^x$ et $h(x)\ =\ x^2$.

**Exercice 2.**

1. Pour $x > 0$, le polynôme $x^2 + 3x + 1$ est bien défini et strictement positif, et la même chose reste vrai pour le dénominateur $e^x\,x^2$. Donc, leur rapport est toujours positif pour tout $x > 0$, et donc le logarithme naturel de cette quantité est bien défini.

2. Pour $x \to 0^+$, on a que $x^2 + 3x + 1\ \longrightarrow\ 1$, tandis que le dénominateur $e^x\,x^2\ \longrightarrow\ 0^+$, et donc
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\ =\ +\infty\,.$$
Pour $x \to +\infty$, par les "croissances comparées" dans la fraction le terme dominant est l'exponentiel :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\ +\ 3x\ +\ 1}{e^x\,x^2}\ =\ 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\ =\ -\infty\,.$$

3. Vu que $\lim_{x\to 0^+} f(x)\ =\ +\infty$, il n'y a pas de points d'intersection du graphe de $f$ avec l'axe des ordonnées. En fait, $f$ admet un asymptôte vertical au point $x = 0$.

4. On note que, pour les propriétés du logarithme, on peut écrire

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 3x + 1}{e^x\, x^2}\right) = \ln\left(x^2 + 3x + 1\right) - x - 2\ln x\,. \tag{1}$$

Donc, $f$ est dérivable à tout point de son domaine, car elle est une somme de fonctions dérivables et composition de fonctions dérivables. Grâce à la formule de la dérivée d'une fonction composée, on trouve que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x+3}{x^2+3x+1} - 1 - \frac{2}{x} = -1 - \frac{2x^2+3x - 2(x^2+3x+1)}{x\,(x^2+3x+1)} \\ &= -1 - \frac{3x + 2}{x\,(x^2 + 3x + 1)}\,. \end{aligned}$$

En particulier, de cette expression et du fait que $x > 0$ on dérive que $f'(x) \leq -1 < 0$ pour tout $x$, et donc $f$ est strictement décroissante.

5. Vu les limites calculées à la question 2, la proposition $(P)$ de l'exercice 1 est vérifiée. Vu que $f$ est strictement décroissante, aussi la proposition $(Q)$ de l'exercice 1 est satisfaite (par contrapposée : si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$ grâce au fait que $f$ est strictement décroissante). Les deux propositions ensemble impliquent que $f$ est une bijection.

6. La réponse à la question précédente garantit l'existence d'un et un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses. Il est donné par la rélation

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 3x + 1}{e^x\, x^2}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2 + 3x + 1}{e^x\, x^2} = 1\,,$$

d'où on trouve la rélation satisfaite par $x_0$ :

$$(x_0)^2 + 3x_0 + 1 = e^{x_0}\,(x_0)^2\,. \tag{2}$$

7. Si on remplace la formule précédente dans l'expression pour $f'$, on trouve

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= -1 - \frac{3x_0}{x_0\,((x_0)^2 + 3x_0 + 1)} - \frac{2}{x_0\,((x_0)^2 + 3x_0 + 1)} \\ &= -\left(1 + \frac{3}{(x_0)^2\, e^{x_0}} + \frac{2}{(x_0)^3\, e^{x_0}}\right)\,. \end{aligned}$$

L'équation de la tangente à $f$ au point $x_0$ est $y = mx+q$, où $m = f'(x_0)$ et $q$ défini par la rélation $f(x_0) = mx_0 + q$, qui donne $q = -f'(x_0)\,x_0$. En vue de (2), la formule suit.

**<u>Exercice 3.</u>**

1. La première limite tend à 0, car les deux fractions tendent séparemment à 0.

2. Pour la deuxième limite, on calcule

$$\begin{aligned} x\left(\sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 5x - 3}\right) &= x\,\frac{x^2 + 5x + 3 - \left(x^2 + 5x - 3\right)}{\sqrt{x^2 + 5x + 3} + \sqrt{x^2 + 5x - 3}} \\ &= \frac{6\,x}{x\left(\sqrt{1 + 5/x + 3/x^2} + \sqrt{1 + 5/x - 3/x^2}\right)}\,. \end{aligned}$$

On en déduit que la valeur de la limite à $+\infty$ est 3.

3. La troisième limite est un rapport incrémental de la fonction ln au point $e$, avec incrément égal à $x^2$. La limite vaut donc $\ln'(e) = 1/e$.

**Exercice 4.** Soient $a < b$ deux nombres réels ; on définit l'intervalle $I = [a, b[$ . Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses : si elles sont vraies, les prouver ; si elles sont fausses, donner leur négation et la prouver.

1. $\forall x \in I\,,\ \exists\, \varepsilon > 0 \mid x + \varepsilon \in I.$
   La proposition est vrai. En fait, fixé $x \in I$, on peut prend $\varepsilon = (b - x)/2$ et on a que $x + \varepsilon < b$, et donc $x + \varepsilon \in I$.
2. $\forall x \in I\,,\ \exists\, \varepsilon > 0 \mid x - \varepsilon \in I.$
   La proposition est fausse. Sa négation est : $\exists\, x \in I \mid \forall \varepsilon > 0, x - \varepsilon \notin I$. Elle est vraie : ça suffit de prendre $x = a$.
3. $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists x \in I \mid x + \varepsilon \notin I.$
   La proposition est vraie. Si $\varepsilon \geq b - a$, cela est évident. Dans le cas $0 < \varepsilon < b - a$, on peut prendre $x = b - (\varepsilon/2)$ : avec ce choix, $x + \varepsilon = b + (\varepsilon/2) > b$.
4. $\forall x \in I\,,\ \big(\forall\, \varepsilon > 0\,,\ x - \varepsilon \notin I\big) \implies x = a.$
   La proposition est vraie. En fait, soit $x \in I$ tel que $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ x - \varepsilon \notin I$ : cela implique que $x - \varepsilon < a$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où on trouve $x \leq a$. D'autre côté, $x \in I$ implique $x \geq a$, et alors $x = a$.