**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2017-2018
Cursus préparatoire : Fondamentaux des mathématiques 2

---

**Feuille n° 8 : Matrices**

---

**Exercice 1** (∗) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
Parmi les produits $AB, BA, AC, CA, BC, CB$, lesquels ont un sens ? Calculez-les.

**Exercice 2** On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $AB$ et $BA$. Que remarque-t-on ?

**Exercice 3**

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$ ? $A$ peut-elle être inversible ?
   (b) Déterminer toutes les matrices $F$ telles que $AF = 0$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $B$ telles que $BA = I_2$.
3. Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.
   Montrer que $A$ est inversible et déterminer son inverse (en fonction de $B$).

**Exercice 4** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

**Exercice 5** Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer ensuite que $A$ est inversible et calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

**Exercice 6** Avec la formule du binôme, calculer $A^n$ pour $n \geq 3$, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 7** Soit $m$ un réel non nul. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I)(A - 2I)$.
2. Soit $B = \frac{1}{3}(A+I)$ et $C = \frac{1}{3}(A-2I)$. Calculer $B^2$ et $C^2$. En déduire une expression simple de $B^n$ et $C^n$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C$.

**Exercice 8** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$, $A^3$ et $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Montrer que $A$ est inversible et exprimer $A^{-1}$ en fonction de $I$, $A$ et $A^2$.
3. Exprimer $A^4$ et $A^5$ en fonction de $I$, $A$, et $A^2$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe $a_n, b_n, c_n$ tels que $A^n = a_n I + b_n A + c_n A^2$.

**Exercice 9** (∗) Les matrices suivantes sont-elles échelonnées ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -12 & 0 & \\ 0 & 0 & 47 & \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10** (∗) Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11** (∗) Calculer, lorsqu'ils existent, les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbf{C}) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 12 (∗)** Déterminer sous quelles conditions les systèmes suivants admettent une solution :

$$\begin{cases} x-y+2z+2t=a\\ 2x+y-\ z+2t=b\\ x+y\qquad\ +2t=c\\ \qquad y+\ z+2t=d\end{cases}\quad ;\quad \begin{cases} y+z\qquad =a\\ x\ \ +z\qquad =b\\ x\qquad\ \ +t=c\end{cases}$$

**Exercice 13** Résoudre, en fonction du paramètre $m\in\mathbf{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x-\ \ y+z=m\\ x+my-z=1\\ x-\ \ y-z=1\end{cases}\quad ;\quad \begin{cases} mx+\ y+\ \ z=1\\ x+my+\ \ z=m\\ x+\ y+mz=m^2\end{cases}\quad ;\quad \begin{cases} mx+\ y+\ \ z+t=1\\ x+my+\ \ z+t=m\\ x+\ y+mz+t=m+1\end{cases}$$

**Exercice 14 (∗)**

1. On considère l'application linéaire $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z)=(x+2y+y,3x+4y+z,5x+6y+z,7x+8y+z).$$

Écrire la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et de $\mathbf{R}^4$, puis calculer une base du noyau et une base de l'image de $f$. Donner des équations cartésiennes définissant $\operatorname{Im} f$.

2. Idem avec $g:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ définie par

$$g(x,y,z,t)=(2x+2y-z+7t,4x+3y-z+11t,-y+2z-4t,3x+3y-2z+11t).$$

3. Idem avec $\varphi:\mathbf{R}_2[X]\to\mathbf{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P)=(2X+1)P-(X^2-1)P'$.

**Exercice 15** Reprendre les exercices 3 et 4 de la feuille 6, et les exercices 3, 6 (questions 1 à 3), 7 et 8 (questions 1 à 3) de la feuille 7 en utilisant les techniques matricielles.

**Exercice 16** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$. On considère l'endomorphisme $u$ de $E$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$M=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $u^2=u$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$ et une base de $\ker u$.
3. Montrer que $E=\operatorname{Im} u\oplus\ker u$.
4. Écrire la matrice de $u$ dans une base adaptée à cette somme directe.

**Exercice 17** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\ker u$ est une droite, et en donner une base $a$.
2. On note $b=(1,1,1)$ et $c=(1,2,0)$. Montrer que $(a,b,c)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de $u$ dans cette base.
3. On note $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par $b$ et $c$.
   (a) On note $v=u_{|E}:E\to\mathbf{R}^3$. Expliciter la matrice de $v$ de $(b,c)$ dans $(a,b,c)$.
   (b) Montrer que cela a un sens de considérer $w:E\to E$ l'induit de $u$ sur $E$, et écrire la matrice de $w$ dans la base $(b,c)$.

**Exercice 18 (∗)** Soit $E$ un espace de dimension 3, et $e=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $E$. On note $f=(f_1,f_2,f_3)$, où

$$f_1=e_1+2e_2-2e_3,f_2=4e_1+7e_2-6e_3,f_3=-3e_1-5e_2+5e_3.$$

1. Montrer que $f$ est une base de $E$, et écrire la matrice de passage de $e$ vers $f$.
2. Soit $v\in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ dans $f$. Quelle est sa matrice dans $e$ ?
3. Soit $w\in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ dans $e$. Quelle est sa matrice dans $f$ ?

**Exercice 19** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbf{R}^3$ est :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $u$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et déterminer $u^{-1}$.
2. Déterminer une base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $u(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$, $u(\varepsilon_2)=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3)=\varepsilon_2+\varepsilon_3$.
3. Déterminer la matrice de passage $P$ de $(e_1,e_2,e_3)$ à $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, ainsi que $P^{-1}$.
4. En déduire $u^n(e_1)$, $u^n(e_2)$ et $u^n(e_3)$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$.