

---

**Feuille 6**  
**Espaces engendrés ; bases ; dimension ; supplémentaires**

---

**Exercice 1** Soit  $u = (1, 2, 3, 4)$  et  $v = (1, -2, 3, -4)$ .

1. Donner un système de 2 équations à 4 inconnues dont l'ensemble des solutions soit égal à  $\text{Vect}(u, v)$ .
2. Peut-on trouver  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  pour que  $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}(u, v)$ ? Pour que  $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}(u, v)$ ?

**Exercice 2(\*)** Dans  $\mathbf{R}^3$ , déterminer la nature géométrique et une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1.  $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$ .
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2y - z = 0\}$ .
3.  $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x + y + z = 0 \text{ et } 2y - z = 0\}$ .
4.  $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ .
5.  $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$ .
6.  $F_3 = F_1 \cap F_2$ .

**Exercice 3** Dans  $\mathbf{R}^4$ , on considère les vecteurs  $a_1 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $a_2 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $a_3 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $a_4 = (1, 1, 1, 0)$ . Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(a_1, a_2)$  et  $G$  celui engendré par  $(a_3, a_4)$ . Montrer que  $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$ .

**Exercice 4**

On considère les deux sous-ensembles suivants de  $\mathbf{R}^4$

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + 4y - 5z - 2t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : 3x - y + t = 0\}.$$

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$ ; on admettra sans le démontrer que  $F$  est également un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$ .
2. Déterminer une base de  $E$ , puis une base de  $F$ .
3. Déterminer une base de  $E + F$ , puis une base de  $E \cap F$ .
4. Soit  $(f_1, f_2, f_3)$  la base de  $F$  déterminée au 2). Expliciter un vecteur  $f_4$  tel que  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  soit une base de  $\mathbf{R}^4$ .

**Exercice 5**

Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $F, G, H$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F + G = F + H, \quad G \subset H.$$

Montrer que  $G = H$ .

**Exercice 6(\*)**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels distincts de  $\mathbf{R}^6$ , tous les deux de dimension 4. Quelle peut-être la dimension de  $F \cap G$ ? de  $F + G$ ?

**Exercice 7(\*)** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension 3, vérifiant  $\dim F = 1$ ,  $\dim G = 2$  et  $F \not\subset G$ .

Montrer que  $E = F \oplus G$ .

**Exercice 8(\*)** Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites de réels, et soit  $F \subset E$  l'ensemble des suites  $(u_n)$  qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Déterminer toutes les suites  $(u_n)$  dans  $F$  telles que  $u_0 = 1$  et  $u_1 = -2$ .

**Exercice 9** Soit  $E$  l'ensemble des suites convergentes de nombres réels. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ . Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites qui convergent vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 10(\*)** Soit  $E = \mathbf{R}_n[X]$  et  $P \in E$ .

1. Montrer que l'ensemble  $F_P$  des polynômes qui sont des multiples de  $P$  et dont le degré est inférieur ou égal à  $n$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Quelle en est la dimension en fonction du degré de  $P$  ?
2. Soit  $Q \in E$  un polynôme sans racine commune avec  $P$ , et tel que  $\deg(P) + \deg(Q) = n + 1$ . Montrer que  $E = F_P \oplus F_Q$ .
3. En déduire qu'il existe deux polynômes  $U, V$  tels que  $UP + VQ = 1$ .

**Exercice 11**

Soit  $E = \mathbf{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ . On définit

$$E_a = \{P \in E : (X - a) \text{ divise } P\}$$

pour  $a \in \mathbf{R}$ . Montrer que si  $a \neq b$  il existe un couple de réels  $(c, d)$  tels que  $1 = c(X - a) + d(X - b)$ . En déduire que  $E = E_a + E_b$ . La somme est-elle directe ?

**Exercice 12** Soit  $E$  l'espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  des applications dérivables de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}$ . Soit  $F$  le sous-ensemble de  $E$  formé par les applications  $f$  telles que  $f(0) = f'(0) = 0$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Soit  $H$  l'ensemble des applications  $x \mapsto ax + b$ , où  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ . Vérifier que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et montrer que  $F \oplus H = E$ .