
Feuille n° 3 bis : approfondissements sur les fractions rationnelles et les développements limités

---

Exercice 1 Calculer pour chacune des fonctions suivantes un développement limité en 0 à l'ordre n proposé :

1. $f(x) = (1+\cos(2x))(x-\ln(1+x))$ avec $n=4$;
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{6(x-\sin x)}$ avec $n=3$;
3. $f(x) = e^{\sqrt{\cos x}}$ avec $n=2$.

Exercice 2

1. Calculer le développement limité de $\dfrac{1+t}{1+e^t}$ à l'ordre 2 en 0.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^{1/x}}$. Quel est le domaine de définition de f ?
3. Quelle est la limite de f en 0 ?
4. Montrer que f admet un développement asymptotique de la forme
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
lorsque $x \to +\infty$.
5. Montrer que la courbe représentative de f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$, et donner une équation de cette asymptote.
6. Montrer que la courbe représentative de f est située en dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 Soient a et m deux réels. En discutant selon les valeurs de a et m, étudier le comportement de
$$f(x) = \sqrt{x^3+ax^2+x} - mx\sqrt{x+2}$$
lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 4 Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, on a
$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 5 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}(X)$ la fraction rationnelle
$$F(X) = \frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}.$$

Exercice 6 Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^4 - X^3 - X + 1$.

1. Montrer que 1 est racine double de P.
2. Décomposer P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{R}[X]$ puis sur $\mathbf{C}[X]$.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $1/P$ sur $\mathbf{C}(X)$ et sur $\mathbf{R}(X)$.

Exercice 7 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. Calculer la décomposition en éléments simples de P''/P.
2. En étudiant le comportement de $\dfrac{xP''(x)}{P(x)}$ lorsque $x \to +\infty$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Exercice 8 Soient a et b deux réels distincts et soit $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $G(X) = (X-a)^nF(X)$, décomposer F en éléments simples sur $\mathbf{R}$.