Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
Cursus préparatoire, Fondamentaux des Mathématiques 2 2 mai 2018

Devoir surveillé n° 4
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Exercice 1 On considère l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivante :

$$f : (x, y, z) \longmapsto (x - y + z, z, y).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On introduit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants : $E = \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id})$ et $F = \ker(f + \mathrm{Id})$. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
3. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id})$.
4. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Résoudre sur l'intervalle indiqué les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \dfrac{1}{x} y = \cos x$ sur $]0, +\infty[$;
2. $y'' - y' - 2y = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes : $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$, et $f_3 : x \mapsto x^3$. On note alors $E = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). On définit également l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1 + x^2} \mathrm{d}x \end{array}.$$

1. Justifier que φ est bien définie et montrer qu'il s'agit d'une application linéaire.
2. a) Quelles sont les valeurs possibles pour le rang de φ ?
   b) Montrer que φ est surjective.
3. a) Déterminer la dimension de E.
   b) En déduire la dimension du sous-espace vectoriel F de E défini par :

$$F = \Big\{ f \in E \,|\, \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + x^2} \mathrm{d}x = 0 \Big\}.$$

Exercice 4 On considère les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suivants :

$$g : (u_n)_{n \geq 0} \longmapsto (u_{n+1})_{n \geq 0} \quad \text{et} \quad d : (u_n)_{n \geq 0} \longmapsto (v_n)_{n \geq 0} \text{ avec } \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_n = u_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}.$$

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Quelle est son image par g ? Par d ?
2. Calculer les compositions $g \circ d$ et $d \circ g$.
3. Montrer que d est injective. Est-ce un automorphisme ?
4. L'application g est-elle injective ? Surjective ?