Devoir surveillé n° 4 – Corrigé

Exercice 1 On considère l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivante :

$$f : (x, y, z) \longmapsto (x - y + z, z, y).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Réponse : Montrons que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire : soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f\big(\alpha_1(x_1, y_1, z_1) + \alpha_2(x_2, y_2, z_2)\big) &= f\big((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)\big) \\ &= \big((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2), \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\big) \\ &= \alpha_1(x_1 - y_1 + z_1, z_1, y_1) + \alpha_2(x_2 - y_2 + z_2, z_2, y_2) \\ &= \alpha_1 f\big((x_1, y_1, z_1)\big) + \alpha_2 f\big((x_2, y_2, z_2)\big). \end{aligned}$$

Ainsi f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. On introduit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants : $E = \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id})$ et $F = \ker(f + \mathrm{Id})$. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
Réponse : $f + \mathrm{Id} : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, y + z, y + z)$, donc

$$(x, y, z) \in \ker(f + \mathrm{Id}) \iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

D'où $\ker(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\big((1, 1, -1)\big)$ et $(1, 1, -1)$ forme une base de F, qui est de dimension 1. Par le théorème du rang, on sait donc que $E = \mathrm{Im}(f+\mathrm{Id})$ est de dimension $\dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker(f + \mathrm{Id}) = 3 - 1 = 2$. Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}\big((f + \mathrm{Id})(1, 0, 0), (f + \mathrm{Id})(0, 1, 0), (f + \mathrm{Id})(0, 0, 1)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big((2, 0, 0), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0), (1, 1, 1)\big) \end{aligned}$$

par exemple, car $(-1, 1, 1) = (1, 1, 1) - 2(1, 0, 0)$. La famille $\big((1, 0, 0), (1, 1, 1)\big)$ est donc une base de E.

3. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id})$.
Réponse : Comme $f - \mathrm{Id} : (x, y, z) \mapsto (-y+z, -y+z, y-z) = (-y+z)(1, 1, -1)$ est clairement de rang 1 (son image est $\mathrm{Vect}\big((1, 1, -1)\big)$), son noyau est de dimension 2 d'après le théorème du rang. De plus,

$$(f - \mathrm{Id})(1, 0, 0) = (f - \mathrm{Id})(1, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

et donc $F \subset \ker(f - \mathrm{Id})$. Enfin, ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont de dimension 2, d'où l'égalité.

4. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Réponse : Soit $u \in E \cap F$. Alors, par définition de F et d'après la question 3,

$$(f + \mathrm{Id})(u) = (f - \mathrm{Id})(u) = (0, 0, 0), \text{ c-à-d. } \begin{cases} f(u) = -u \\ f(u) = u \end{cases}.$$

Ainsi $u = -u$ et donc $u = (0, 0, 0)$.
De plus, $\dim E + \dim F = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$, donc E et F sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Résoudre sur l'intervalle indiqué les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \frac{1}{x}y = \cos x$ sur $]0, +\infty[$;

   Réponse : Les solutions de l'équation homogène sont les $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-\int 1/x\,\mathrm{d}x} = \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$, où λ est une fonction à déterminer. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,+\infty[,\ y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \cos x &\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = \cos x \\
&\iff \forall x \in]0,+\infty[,\ \lambda'(x) = x\cos x \\
&\Longleftarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \lambda(x) = \int x\cos x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   Or, par intégration par parties, $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x$. Ainsi, les solutions de l'équation complète sur $]0, +\infty[$ sont :

$$y : x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{x\sin x + \cos x}{x} = \sin x + \frac{\cos x + \lambda}{x}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. $y'' - y' - 2y = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

   Réponse : L'équation caractéristique correspondante est $r^2 - r - 2 = 0$, qui a pour solutions -1 et 2. Par conséquent, les solutions de l'équation homogène sont les $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on la cherche sous la forme d'un polynôme de degré 1 multiplié par exp (car le coefficient devant x dans l'exponentielle, 1, n'est pas racine de l'équation caractéristique) : $y : x \mapsto (ax+b)e^x$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à déterminer. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - y'(x) - 2y(x) = xe^x &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \\
&\quad\ (ax+2a+b)e^x - (ax+a+b)e^x - 2(ax+b)e^x = xe^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -2ax + a - 2b = x \\
&\iff \begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \\
&\iff a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

   Ainsi, les solutions de l'équation complète sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} - \frac{1}{4}(2x+1)e^x, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 On considère les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes : $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$, et $f_3 : x \mapsto x^3$. On note alors $E = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). On définit également l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \end{array}.$$

1. Justifier que φ est bien définie et montrer qu'il s'agit d'une application linéaire.

   Réponse : Pour toute $f \in E$, l'intégrale $\int_0^1 f(x)/(1+x^2)\mathrm{d}x$ est bien définie car, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, il s'agit de l'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction continue sur cet intervalle. Par conséquent, l'application φ est bien définie. Montrons qu'elle est linéaire : soient $f, g \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(af + bg) = \int_0^1 \frac{(af+bg)(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = a\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x + b\int_0^1 \frac{g(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = a\varphi(f) + b\varphi(g)$$

   Donc φ est bien linéaire.

2. a) Quelles sont les valeurs possibles pour le rang de φ ?
Réponse : D'après la définition de φ, son image est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, qui est un espace vectoriel de dimension 1. Donc la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$, c-à-d. le rang de φ, est inférieure ou égale à 1. D'où $\operatorname{rg}(\varphi) \in \{0, 1\}$.
b) Montrer que φ est surjective.
Réponse : Montrons que l'application φ n'est pas l'application nulle :

$$\varphi(f_0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi φ n'est pas nulle, et donc n'est pas de rang 0. Par conséquent, d'après la question précédente, φ est de rang 1. D'où $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$ et $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$.

3. a) Déterminer la dimension de E.
Réponse : Comme $E = \operatorname{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$, montrons que la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) est libre : soient $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tels que $a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$, c-à-d. :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$$

Autrement dit, le polynôme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}[X]$ est le polynôme nul, et donc $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Ainsi la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) est libre, et forme une base de E, qui est donc de dimension 4.
b) En déduire la dimension du sous-espace vectoriel F de E défini par :

$$F = \big\{ f \in E \mid \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x = 0 \big\}.$$

Réponse : On remarque que $F = \ker\varphi$. Donc, par le théorème du rang,

$$\dim F = \dim\ker\varphi = \dim E - \dim \operatorname{Im}\varphi = 4 - 1 = 3.$$

Exercice 4 On considère les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ suivants :

$$g : (u_n)_{n\geq 0} \longmapsto (u_{n+1})_{n\geq 0} \quad \text{et} \quad d : (u_n)_{n\geq 0} \longmapsto (v_n)_{n\geq 0} \text{ avec } \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_n = u_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}.$$

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Quelle est son image par g ? Par d ?
Réponse : En appliquant les définitions de g et d :

$$g\big((1,2,3,4,\dots)\big) = (2,3,4,5,\dots) \quad \text{et} \quad d\big((1,2,3,4,\dots)\big) = (0,1,2,3,\dots)$$

2. Calculer les compositions $g \circ d$ et $d \circ g$.
Réponse : Soit $(u_n)_{n\geq 0} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ une suite réelle.

$$g \circ d\big((u_0, u_1, u_2, \dots)\big) = g\big((0, u_0, u_1, \dots)\big) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$$

Donc $g \circ d = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$.

$$d \circ g\big((u_0, u_1, u_2, \dots)\big) = d\big((u_1, u_2, u_3, \dots)\big) = (0, u_1, u_2, \dots)$$

Donc appliquer $d \circ g$ consiste à remplacer le terme de rang 0 de la suite par le nombre 0.

3. Montrer que d est injective. Est-ce un automorphisme ?
Réponse : Pour l'injectivité :

$$(u_n)_{n\geq 0} \in \ker d \Longrightarrow g\Big(d\big((u_n)_n\big)\Big) = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \Longleftrightarrow g \circ d\big((u_n)_n\big) = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \Longleftrightarrow (u_n)_n = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$$

Donc $\ker d = \{0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}\}$ et donc l'endomorphisme d est injectif. L'application d n'est par contre pas surjective, car par exemple $(1, 0, 0, \dots) \notin \operatorname{Im} d$: le terme de rang 0 de cette suite n'est pas 0. d n'est donc pas un automorphisme.

4. L'application g est-elle injective ? Surjective ?
Réponse : Montrons que g n'est pas injective :

$$(u_n)_n \in \ker g \Longleftrightarrow \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = 0 \Longleftrightarrow \forall n \geq 1,\ u_n = 0$$

donc $\ker g = \operatorname{Vect}\big((1,0,0,\dots)\big) \neq \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$ et donc g n'est pas injective.
Par contre g est surjective : pour toute $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$(v_n)_n = g \circ d\big((v_n)_n\big) = g\Big(d\big((v_n)_n\big)\Big) \in \operatorname{Im} g.$$