Éléments de réponse au devoir surveillé n°3

Exercice 1 Soient $u = (3, -1, 1)$, $v = (-1, 2, 2)$ et $w = (2, -3, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
Réponse : soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $xu + yv + zw = (0, 0, 0)$. On a alors

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}.$$

En résolvant le système (par pivot de Gauss par exemple), ceci implique que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. En conclusion, la famille (u, v, w) est libre.

2. La famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
Réponse : d'après le cours, toute famille libre à 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (de dimension 3) est une base de $\mathbb{R}^3$. D'où (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ par la question 1.

3. (a) En utilisant 2, pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un unique $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$xu + yv + zw = (18, -18, 36)\,? \tag{S}$$

Réponse : cette affirmation est vraie car (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. L'existence de (x, y, z) est assurée, car la famille (u, v, w) est génératrice dans $\mathbb{R}^3$. Un tel triplet (x, y, z) est unique, car la famille (u, v, w) est libre.

(b) Trouver explicitement un tel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Réponse : soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. La relation (S) se réécrit

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 18 \\ -x + 2y - 3z = -18 \\ x + 2y + z = 36 \end{cases};$$

or ce système est équivalent à $(x, y, z) = (1, 11, 13)$ (par pivot de Gauss par exemple).

Exercice 2

1. Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } (3x + 2z, 3y + z + 3t, x + y + z + t, 2x - y + z - t) = (0, 0, 0, 0)\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Réponse : On vérifie tout d'abord que $(0, 0, 0, 0) \in F$: en effet, la condition de l'ensemble F est satisfaite pour $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$. On vérifie maintenant que F est stable par combinaison linéaire. Soient X, X' dans F et λ, λ' dans $\mathbb{R}$. Notant $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$, montrons que $\lambda X + \lambda' X' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')$ est dans F. On peut en effet écrire

$$\begin{pmatrix} 3(\lambda x + \lambda' x') + 2(\lambda z + \lambda' z') \\ 3(\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') + 3(\lambda t + \lambda' t') \\ (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t') \\ 2(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') - (\lambda t + \lambda' t') \end{pmatrix}$$
$$= \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 3x + 2z \\ 3y + z + 3t \\ x + y + z + t \\ 2x - y + z - t \end{pmatrix}}_{=\, 0_{\mathbb{R}^4} \text{ car } X \in F} + \lambda' \underbrace{\begin{pmatrix} 3x' + 2z' \\ 3y' + z' + 3t' \\ x' + y' + z' + t' \\ 2x' - y' + z' - t' \end{pmatrix}}_{=\, 0_{\mathbb{R}^4} \text{ car } X' \in F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve bien que $\lambda X + \lambda' X'$ est dans F. En conclusion, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Donner une base et la dimension de F.
Réponse : On a que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x+\ y+\ z+\ t=0 & (L_1) \\ 3x \qquad +2z \qquad =0 & (L_2) \\ \qquad 3y+\ z+3t=0 & (L_3) \\ 2x-\ y+\ z-\ t=0 & (L_4) \end{cases} \iff \begin{cases} x+\ y+z+\ t=0 & \\ \ -3y-z-3t=0 & \leftarrow L_2-3L_1 \\ \quad 3y+z+3t=0 & \leftarrow L_3 \\ \ -3y-z-3t=0 & \leftarrow L_4-2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+z=-\ y-\ t \\ \quad z=-3y-3t \end{cases} \iff \begin{cases} z=-3y-3t \\ x=\ \ 2y+2t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{E}$$

Ainsi, en posant $u=(2,1,-3,0)$ et $v=(2,0,-3,1)$, on tire de (E) que la famille (u,v) est une famille génératrice de F. C'est aussi une famille libre car si $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ est tel que

$$\lambda_1 u+\lambda_2 v=0_{\mathbb{R}^4}\,,$$

on a que

$$\begin{cases} 2\lambda_1+2\lambda_2= & 0 \\ \lambda_1 \qquad = & 0 \\ -3\lambda_1-3\lambda_2= & 0 \\ \qquad \lambda_2= & 0 \end{cases} \text{ et donc que } \lambda_1=\lambda_2=0\,,$$

ce qui conclut. D'où (u,v) est une base de F. Ainsi, F admettant une base à deux vecteurs est de dimension 2.

Exercice 3 Soit $I=\int_0^{\pi/4}\ln\left(2+2\sin x+\sin^2 x\right)\cos x\,dx$.

1. Justifier que I est bien définie.
Réponse : on a

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\quad 2+2\sin x+\sin^2 x=(1+\sin x)^2+1\geq 1\,.$$

D'où la fonction h donnée pour $x\in\mathbb{R}$ par $h(x)=2+2\sin x+\sin^2 x$ est à valeurs dans $]0,+\infty[$, domaine de définition de ln. Ainsi, la fonction $(\ln h)\times\cos$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Enfin, les composées, sommes et produits de fonctions continues étant continus, cette fonction est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et donc intégrable sur $[0,\pi/4]$. Pour conclure, I est bien définie.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right)-\int_0^{\pi/4}2(\cos x)\times\frac{(\sin x)\times(1+\sin x)}{\sin^2 x+2\sin x+2}\,dx\,.$$

Réponse : arguant comme en question 1, la fonction $\ln h$ est aussi C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée h'/h. On peut donc légitimement intégrer par parties et obtenir

$$I=\int_0^{\pi/4}(\ln h(x))\times\cos(x)\,dx=[(\ln h(x))\times\sin x]_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\frac{h'(x)}{h(x)}\sin(x)\,dx\,,$$

ce qui conclut car $h'(x)=2(1+\sin x)\times\cos x$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin 0=0$.

3. Donner une primitive de $t\mapsto\frac{t(1+t)}{t^2+2t+2}$.
Réponse : cette fonction est bien définie pour tout $t\in\mathbb{R}$, car $t^2+2t+2=(t+1)^2+1\geq 1$. On peut alors écrire

$$\frac{t(1+t)}{t^2+2t+2}=\frac{(t^2+2t+2)-(t+2)}{t^2+2t+2}=1-\frac{t+2}{t^2+2t+2}\,.$$

On se focalise maintenant sur le dernier terme. La fonction $\tau : t\mapsto t^2+2t+2$ est dérivable et $\tau'(t)=2t+2$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. On peut donc écrire

$$\frac{t+2}{t^2+2t+2}=\frac{1}{2}\frac{\tau'(t)}{\tau(t)}+\frac{1}{1+(t+1)^2}\,.$$

Au bilan, la fonction $t\mapsto t-\left(\frac{1}{2}\ln\left(t^2+2t+2\right)+\arctan(t+1)\right)$ répond à la question.

4. Montrer que $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} + \ln\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right) - \ln 2 + 2\arctan\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$.
Réponse : on effectue le changement de variable C^1 donné par $t = \sin x$ ($dt = \cos x\ dx$) dans la dernière intégrale de la question 2, on obtient

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right) - 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t(1+t)}{t^2+2t+2}dt\,,$$

et on conclut par la question 3 $\big(\arctan 1 = \frac{\pi}{4}\big)$.

Exercice 4

1. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(1+nx)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Réponse : la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+nx)^2}$ est continue et donc intégrable sur $[0,1]$. On sait de plus

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+nx)^2} = \begin{cases} \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{1+nx}\right]_0^1 = \frac{1}{1+n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^\star\,, \\ \int_0^1 1\ dx = 1 \text{ pour } n = 0\,. \end{cases}$$

2. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{g(x)}{1+nx}dx = 0$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Réponse : On a

$$0 \leq \left|\int_0^1 \frac{g(x)}{1+nx}dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{g(x)}{1+nx}\right| dx \underset{C.S.}{\leq} \left(\int_0^1 g(x)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \frac{dx}{(1+nx)^2}\right)^{1/2}\,,$$

ce qui conclut par la question 1 et encadrement.

3. Soit f une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(1+nx)^2}dx = \frac{f(0)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (\star)$$

   quand $n \to +\infty$.
   Réponse : comme f est C^1, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f(x)}{(1+nx)^2}dx &= \left[-\frac{f(x)}{n(1+nx)}\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f'(x)}{1+nx}dx\,,\\ &= \frac{f(0)}{n} - \underbrace{\frac{f(1)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}_{=o\left(\frac{1}{n}\right)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\,.\end{aligned}$$

   La dernière égalité utilise la question 2 qui s'applique car, f étant supposée C^1, f' est continue.
   (b) Montrer que si on pose $a_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $J = \int_0^1 f(x)\ dx$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \int_0^1 \frac{f(t)}{(1+nt)^2}\ dt = J \times f(0)\,.$$

   Réponse : la fonction f étant supposée continue, par propriété du cours sur les sommes de Riemann, on a

$$a_n = nJ + o(n)\,,$$

   quand $n \to +\infty$, ce qui conclut en utilisant aussi ($\star$).

4. (Bonus) Montrer que ($\star$) est vraie même si f n'est supposée que continue sur $\mathbb{R}$.
Réponse : Par la question 1, $\int_0^1 (1+nx)^{-2}dx = \frac{1}{n}(1+o(1))$ quand $n \to +\infty$. Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{(1+nx)^2}dx = 0\,. \qquad (\star\star)$$

On rappelle que, par définition, $(\star\star)$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^\star\,, \forall n \geq n_0\,, \quad \left| \int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{(1+nx)^2} dx \right| \leq \varepsilon\,.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon/2$ pour tout $x \in [0, \delta]$ et il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0, 1]$. D'autre part, comme les fonctions $x \mapsto (1 + nx)^{-2}$ sont décroissantes sur $[0, +\infty)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\max_{x\in[\delta,1]} \frac{1}{(1+nx)^2} = \frac{1}{(1+n\delta)^2} \leq \frac{\varepsilon}{4M}\,.$$

Au bilan, on conclut que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{(1+nx)^2} dx \right| &\leq \int_0^\delta \frac{|f(x)-f(0)|dx}{(1+nx)^2} + \int_\delta^1 (|f(x)| + |f(0)|) \times \frac{1}{(1+nx)^2}\, dx \\ &\leq \int_0^\delta \frac{\varepsilon\, dx}{2(1+nx)^2} + \int_\delta^1 2M \times \frac{\varepsilon}{4M}\, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de $(\star\star)$ et résout la question 4.