Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2 4 avril 2018

Devoir surveillé n°3
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Exercice 1 Soient $u = (3, -1, 1)$, $v = (-1, 2, 2)$ et $w = (2, -3, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. La famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. (a) En utilisant 2, pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un unique $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$xu + yv + zw = (18, -18, 36)\,?$$
   (b) Trouver explicitement un tel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1. Montrer que l'ensemble
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } (3x + 2z, 3y + z + 3t, x + y + z + t, 2x - y + z - t) = (0, 0, 0, 0)\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base et la dimension de F.

Exercice 3 Soit $I = \int_0^{\pi/4} \ln\left(2 + 2\sin x + \sin^2 x\right) \cos x \, dx$.

1. Justifier que I est bien définie.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(\frac{5 + 2\sqrt{2}}{2}\right) - \int_0^{\pi/4} 2(\cos x) \times \frac{(\sin x) \times (1 + \sin x)}{\sin^2 x + 2\sin x + 2} \, dx\,.$$
3. Donner une primitive de $t \mapsto \frac{t(1+t)}{t^2+2t+2}$.
4. Montrer que $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} + \ln\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right) - \ln 2 + 2\arctan\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

1. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(1+nx)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{g(x)}{1+nx} dx = 0$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Soit f une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(1+nx)^2} dx = \frac{f(0)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (\star)$$
   quand $n \to +\infty$.
   (b) Montrer que si on pose $a_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $J = \int_0^1 f(x)\, dx$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \int_0^1 \frac{f(t)}{(1+nt)^2} \, dt = J \times f(0)\,.$$
4. (Bonus) Montrer que $(\star)$ est vraie même si f n'est supposée que continue sur $\mathbb{R}$.