Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2 07 mars 2018

Devoir surveillé n°2
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},0[\bigcup]0,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)}$.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0.
2. Est-ce que f est prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, donner un prolongement sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
3. Donner (en le justifiant) l'équation de la tangente en 0.
4. Étudier la position de la tangente par rapport à la courbe représentative de f au voisinage de 0.

Correction :

1. On commence par le numérateur, en rappelant que $\ln(1+h)=h-\frac{1}{2}h^2+o(h^3)$,

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\\ &= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^4)\\ &= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).\end{aligned}$$

Quant au dénominateur,

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)} &= \frac{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\\ &= \frac{-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}\\ &= (-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3))(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2))\\ &= -\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3).\end{aligned}$$

2. On voit que

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

Donc f est prolongeable en 0 par continuité. On définit

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\neq 0, x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ 0, \text{ si } x=0.\end{cases}$$

Évidemment, $\widetilde{f}$ est un prolongement de f.

3. A l'aide du DL en 0, l'équation de la tangente en 0 existe et elle est

$$y=-x/2$$

4. Voyons que
$$d(x) := f(x) - (-x/2) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
Dans un voisinage de 0, $d(x) < 0$ pour $x > 0$ et $d(x) > 0$ pour $x < 0$. Donc La courbe est au dessous de la tangente pour x petit et positif, elle est au dessus de la tangente pour x petit et négatif.

Exercice 2

On considère la fonction rationnelle $F(x) = \frac{2}{x^3+x^2+x+1}$.

1. Décomposer F en éléments simples sur $\mathbf{R}$.
2. À l'aide de cette décomposition, calculer une fonction primitive de F :
$$\int \frac{2}{x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x,$$
en précisant l'intervalle où les calculs sont valables.

Correction :

1. Notons que
$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1).$$
Ainsi,
$$F(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$
avec certain $a, b, c \in \mathbf{R}$. En particulier,
$$a = F(x)(x+1)|_{x=-1} = 1$$
et puis, on trouve que $b = -1$, $c = 1$. Donc,
$$F(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}.$$
2. Pour les fonctions primitives, on a
$$\begin{aligned}\int F(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) + \mathit{constante}\end{aligned}$$
Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)$ est une primitive de F.

Exercice 3

Les sous-ensembles de $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$) ou de $\mathbf{R}^3$ ci-dessous en sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Vous justifierez soigneusement votre réponse.

1. $E_1 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : xy = z^2\}$.
2. $E_2 := \{(a+b, a, 3a-b) | (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$.
3. $E_3 := \{f \in E : f(0)^2 = 1\}$.

Correction :

1. Non. On voit que $(1, 1, -1)$ et $(1, 1, 1)$ sont dans E_1. Or $(1, 1, -1) + (1, 1, 1) = (2, 2, 0) \notin E_1$.
2. Oui. On va montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Premièrement, si on prend $a = b = 0$, on a $(0, 0, 0) \in E_2$. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E_2$. Alors il existent (a_u, b_u) et (a_v, b_v) dans $\mathbf{R}^2$ tels que
$$\overrightarrow{u} = (a_u + b_u, a_u, 3a_u - b_u), \quad \overrightarrow{v} = (a_v + b_v, a_v, 3a_v - b_v).$$
Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, il faut démontrer que $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} \in E_2$. En effet,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} =&(a_u + b_u + \lambda(a_v + b_v), a_u + \lambda a_v, 3a_u - b_u + \lambda(3a_v - b_v)) \\ =&((a_u + \lambda a_v) + (b_u + \lambda b_v), a_u + \lambda a_v, 3(a_u + \lambda a_v) - (b_u + \lambda b_v)) \\ =&(a + b, a, 3a - b)\end{aligned}$$
en prenant $a = a_u + \lambda a_v$ et $b = b_u + \lambda b_v$. On en déduit que $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} \in \mathbf{E}_2$.

3. Non. On note que la fonction nulle 0_E n'est pas dans E_3.

Exercice 4

1. Rappeler l'inégalité triangulaire pour les intégrales.
2. (a) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) (Bonus) Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $0 < a < b$. En commençant par exprimer $\ln(b) - \ln(a)$ comme une certaine intégrale, montrer que

$$\ln(b) - \ln(a) \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Correction :

1. Si f est continue sur $[a, b]$ avec $a \leqslant b$, alors

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. (a) Si f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $a \leqslant b$, alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

   (b) Puisque $\ln(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$\ln(b) - \ln(a) = \int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\left(\int_a^b 1\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)} = \sqrt{(b-a)\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$