Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2017-2018

Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 — 14 février 2018

Devoir surveillé n° 1
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Exercice 1

1. Calculer la limite de $f(x) = \dfrac{(\cos x)^x - 1}{\sin x - \operatorname{sh} x}$ lorsque $x \to 0$.
2. Calculer le développement limité de $g(x) = \dfrac{\ln(1 + x + x^2)}{x}$ à l'ordre 2 lorsque $x \to 1$.

Exercice 2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\text{(a)} \quad A(X) = \frac{X^4}{(X-1)(X^2+4)} \qquad ; \qquad \text{(b)} \quad B(X) = \frac{1}{X^3 - 2X^2 + X}.$$

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $]-1\,,1[\setminus\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   Dans la suite de l'exercice, on note encore f le prolongement ainsi obtenu.
3. Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 ?
4. Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0 ?

Exercice 4 Soit une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q} \in \mathbf{R}(X)$ ayant un pôle $a \in \mathbf{R}$ de multiplicité 2. On rappelle alors :

(a) que l'on peut écrire $Q(X) = (X-a)^2 R(X)$, où R est un polynôme tel que $R(a) \neq 0$;

(b) qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et $G \in \mathbf{R}(X)$ sans pôle en a tels que $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{\lambda}{X-a} + \dfrac{\mu}{(X-a)^2} + G(X)$.

Le but de l'exercice est de trouver des expressions de λ et μ en fonction de $P(a)$, $P'(a)$, $Q(a)$ et $Q'(a)$.

1. Montrer que $\dfrac{P(a+h)}{R(a+h)} = \mu + \lambda h + o(h)$ lorsque $h \to 0$.
2. (a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour la fonction $x \mapsto \frac{P(x)}{R(x)}$ au voisinage de a.
   (b) En déduire des expressions de λ et μ en fonction de $P(a)$, $P'(a)$, $R(a)$ et $R'(a)$.
3. (a) Montrer que $R(X) = \dfrac{Q''(a)}{2!} + \dfrac{Q'''(a)}{3!}(X-a) + \cdots + \dfrac{Q^{(m)}(a)}{m!}(X-a)^{m-2}$, où $m = \deg(Q)$.
   (b) En déduire que
   $$\lambda = \frac{6P'(a)Q''(a) - 2P(a)Q'''(a)}{3Q''(a)^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{2P(a)}{Q''(a)}.$$
4. **[Bonus, hors barème]** En admettant que ces formules sont encore vraies lorsque $P/Q \in \mathbf{C}(X)$ et $a \in \mathbf{C}$, trouver la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ de $\dfrac{1}{(X^n-1)^2}$.