DEVOIR MAISON - CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Il s'agit de montrer que $\forall t \in [0, 2\pi]$, $\forall x \in D$, $x^2 - 2\cos t\, x + 1 > 0$.
Soit donc $t \in [0, 2\pi]$. Le polynôme $x^2 - 2\cos t\, x + 1$ a pour discriminant réduit
$\Delta' = \cos^2 t - 1 = -\sin^2 t$.

- Si $t \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, on a $\Delta' < 0$ donc le polynôme reste > 0 sur $\mathbb{R}$, donc sur D.
- Si $t \in \{0, 2\pi\}$, alors $x^2 - 2\cos t + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$ sur D.
- Si $t = \pi$, " " $= x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$ sur D.

Ainsi, pour tout $x \in D$, la fonction $g_x : t \in [0, 2\pi] \mapsto x^2 - 2\cos t\, x + 1$ est à valeurs > 0, et donc, comme elle est également continue, <u>la fonction $t \mapsto \ln \circ g_x(t)$ est bien définie et continue sur $[0, 2\pi]$.</u>

2. On reconnaît en S_n la somme de Riemann associée à la fonction g_x, pour $x \in D$ fixé.
Or, pour tout $x \in D$, g_x est continue sur $[0, 2\pi]$ donc elle y est bornée et intégrable, de sorte que $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \int_0^1 g_x(t)\,dt = f(x)$.

3. Remarquons que $x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1 = \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$.
(pour le vérifier, partir du membre de droite, ou calculer les racines complexes du membre de gauche)

Ainsi, $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) = \underbrace{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}_{x^n - 1} \cdot \prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$

$$= \prod \overline{\left(x - e^{2ik\pi/n}\right)}$$
$$= \overline{\prod\left(x - e^{2ik\pi/n}\right)}$$
$$= \overline{x^n - 1}$$
$$= x^n - 1$$

d'où $\boxed{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right) = \left(x^n - 1\right)^2}$

4. D'après la question précédente, on a donc $S_n = \frac{2\pi}{n} \ln((x^n-1)^2)$.

• Si $x > 1$, on a $x^n - 1 > 0$ donc $\ln((x^n-1)^2) = 2\ln(x^n-1)$

Dans ce cas, $S_n = \frac{2\pi}{n} \times 2 \underbrace{\ln(x^n - 1)}_{\ln\left(x^n\left(1-\frac{1}{x^n}\right)\right) = n\ln x + \ln\left(1-\frac{1}{x^n}\right)}$

$= 4\pi \ln x + \underbrace{\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{x^n}\right)}_{\to 0}$

$\to 0$ car $\ln\left(1-\frac{1}{x^n}\right) \to 0$ et $\frac{1}{n} \to 0$

• Si $x < 1$, on a $x^n - 1 < 0$,

donc $\ln((x^n-1)^2) = 2\ln|x^n-1| = 2\ln(1-x^n)$

Alors $S_n = \underbrace{\frac{4\pi}{n}}_{\to 0} \underbrace{\ln(1-x^n)}_{\underset{n\to\infty}{\to} 0}$

donc $S_n \to 0$.

Finalement, on obtient $\boxed{f(x) = \begin{cases} 4\pi \ln x & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$.

EXERCICE 2

1. Il s'agit de voir que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t}\, dt$ a un sens pour tout $x>0$.
C'est le cas car si $x>0$, la fonction $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t}{t}$ est bien définie et est continue sur $[x, 2x]$, en particulier car le dénominateur ne s'annule pas.

2. Soit $x>0$ et $t \in [x, 2x]$. La fonction ch étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc $\operatorname{ch} x \leq \operatorname{ch} t \leq \operatorname{ch}(2x)$.
Donc, en divisant par $t>0$, on obtient $\frac{\operatorname{ch} x}{t} \leq \frac{\operatorname{ch} t}{t} \leq \frac{\operatorname{ch}(2x)}{t}$

Intégrons cet encadrement sur $[x, 2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} x}{t}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch}(2x)}{t}\,dt$$

$$\operatorname{ch} x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leq f(x) \leq \operatorname{ch}(2x) \int_x^{2x} \frac{dt}{t}.$$

Or, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \left[\ln t\right]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln \frac{2x}{x} = \ln 2.$

Ainsi, $\underbrace{\ln 2 \cdot \operatorname{ch} x}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \ln 2} \leq f(x) \leq \underbrace{\ln 2 \cdot \operatorname{ch}(2x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \ln 2}$

Par théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln 2$.

Ainsi, <u>f peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 2$.</u>

3. Posons, pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{ch} t}{t}\,dt$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $F'(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{x}$.

Or, on peut écrire $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\operatorname{ch} t}{t}\,dt + \int_1^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t}\,dt$

$$= -F(x) + F(2x)$$

f est donc dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -F'(x) + 2F'(2x)$

$$= -\frac{\operatorname{ch} x}{x} + 2\,\frac{\operatorname{ch}(2x)}{2x}$$

d'où $\boxed{f'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch}(x)}{x} \text{ pour tout } x > 0}$.

4. On a vu que f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Elle est même de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ vu l'expression de f'.
Il reste à montrer que f' admet une limite finie en 0 : le théorème général de prolongement C^1 permettra de conclure.

Or, $f'(x) = \dfrac{1}{x}\left(\operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch} x\right) = \dfrac{1}{x}\left(1 + o(x) - (1 + o(x))\right) = \underbrace{\dfrac{1}{x} \times o(x)}_{= o(1)}$

cela montre que $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: CQFD.