
Feuille d'exercices n°5
Polynôme minimal - Théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 1. ⧫ Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes avec $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. ⧫ Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. ⧫

1. Soit J une matrice complexe de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer J^p pour tout entier $1 \leq p \leq 4$.
   (b) En déduire que J est diagonalisable.
   (c) Montrer que I_4, J, J^2, J^3 sont linéairement indépendantes.
   (d) Déterminer le polynôme minimal de J.
   (e) Calculer les valeurs propres de J.
   (f) Diagonaliser J en exhibant la matrice de passage.

2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Exprimer A comme un polynôme en la matrice J.
   (b) Montrer que, pour tout polynôme Q, $Q(J)$ est diagonalisable et que

$$\mathrm{Spec}(Q(J)) = \{Q(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(J)\}$$

   oú $\mathrm{Spec}(M)$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice M.
   (c) En déduire que A est diagonalisable et calculer les valeurs propres de A.
   (d) Calculer le déterminant de A.

Exercice 4. Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que son polynôme caractéristique est $p_A(X) = (-1)^n X^n$.
2. Montrer que son polynôme minimal est $m_A(X) = X^k$, où $k \leq n$ est l'indice de nilpotence de A.
3. Par récurrence, montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
4. Inversement, montrer que toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec des 0 sur la diagonale est nilpotente.
5. Montrer qu'une matrice nilpotente est diagonalisable si et seulement si elle est nulle.

Exercice 5. Soit n un entier suprieur ou égal à 2. On considère l'application linéaire Trace : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à toute matrice associe la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Déterminer l'image de Trace et la dimension de son noyau.
2. Montrer que l'on a une somme directe :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\text{Trace}) \oplus \text{Vect}(I_n).$$
3. Soit u l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$u(A) = A + \text{Trace}(A)\, I_n.$$
   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

Exercice 6. ⧫ Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de chacune des matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

puis déterminer si elles sont diagonalisables.

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^3 = 4f$$

Montrer que la trace de f est un entier pair.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 - A^2 + A - I_n = 0$$

Montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 9. ⧫ Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^4 = f^2$$

On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 10. ⧫ A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que la restriction de u au sous-espace F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Exercice 12. ♦ Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 13. ♦ L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^3 + X = 0. \tag{1}$$

Soit A une matrice non nulle satisfaisant l'équation (**??**).

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \ker A \oplus \ker(A^2 + I_3).$$

2. Montrer que $\ker(A^2 + I_3)$ est nécessairement de dimension paire, et en déduire que $\ker A$ est de dimension 1.

3. Déterminer le polynôme minimal de A.

4. Montrer que A est semblable à la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$