Université Lyon 1 - Licence STS - Automne 2017

Unité d'enseignement : Algèbre III
Partiel 26 octobre 2017
Durée : 1 h 30

Documents, ordinateurs, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1. Répondre aux questions suivantes en justifiant brièvement.

1. Les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils en somme directe :
$$E = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}15\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix}\right\} ?$$
2. Donner une matrice dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les seules valeurs propres sont 1 et -2.
3. Donner un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont le polynôme caractéristique est $P_u(X) = -X^2(X+3)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. L'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est
$$A = \begin{pmatrix} n & 33 & 33 & \cdots & 33 & 33 \\ 0 & n-1 & 33 & \cdots & & 33 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 2 & 33 & 33 \\ \vdots & & & 0 & 1 & 33 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
est-il surjectif ?
5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A et soit $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^3$, où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$
Est-ce que E est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$ pour l'endomorphisme u ? Est-il stable par u ?

Exercice 2.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
   (b) Donner une matrice P telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   (c) Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout n.
   (d) Calculer A^n en fonction de n.
2. Pour n entier supérieur à 2, on considère le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 3 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
On pose aussi $\Delta_1 = 5$.

(a) Calculer Δ_2 et Δ_3.

(b) Démontrer que $\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

3. (a) On pose pour $n \geq 1$, $U_n = \begin{pmatrix} \Delta_{n+1} \\ \Delta_n \end{pmatrix}$. Établir pour tout n une relation entre U_{n+1}, U_n et A.

   (b) En déduire que $U_{n+1} = A^n U_1$ pour tout $n \geq 1$.

   (c) Calculer Δ_{n+1} pour tout n.