Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Algbre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

Contrôle Continu n° 2

Mardi 21 novembre 2017 – Durée 45 minutes

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note φ_A l'endomorphisme qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour calculer le polynôme caractéristique de A, on développe par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det(A - X\mathrm{I}_3) &= \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\big((3-X)(1-X)+1\big) = (1-X)(X^2-4X+4) \\ &= (1-X)(X-2)^2 \end{aligned}$$

(si on ne reconnaît pas l'identité remarquable, on peut, toute honte bue, utiliser le discriminant).

2. Les valeurs propres de A sont 1, avec la multiplicité 1, et 2, avec la multiplicité algébrique 2.

3. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Espace propre associé à la valeur propre 1. On a :

$$\begin{aligned} v \in \ker(A - \mathrm{I}_3) &\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases} \\ &\iff v = y(0, 1, -1). \end{aligned}$$

On en déduit que (v_1) est une base de $\ker(A - \mathrm{I}_3)$, où $v_1 = (0, 1, -1)$.

Espace propre associé à la valeur propre 2. On a :

$$\begin{aligned} v \in \ker(A - 2\mathrm{I}_3) &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff v = x(1, -1, 0). \end{aligned}$$

On en déduit que (v_2) est une base de $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$, où $v_2 = (1, -1, 0)\big)$.

En particulier, la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est 1, strictement inférieure à la multiplicité algébrique, donc A n'est pas diagonalisable.

Pour trouver une base qui trigonalise A, voici plusieurs possibilités, classée ici par ordre décroissant de difficulté.

Première solution. On complète la famille (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$. Comme v_1 et v_2 sont propres, on obtiendra automatiquement une matrice triangulaire pour φ_A dans une telle base. Par exemple, la famille (e_1, v_2, v_1) est libre (où e_1 est le premier vecteur de la base canonique) car sont rang est celui de la matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dont (v_1, v_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice de φ_A est de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 2 & v \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix},$$

et on peut ajouter que $w = 2$ puisque la trace de U, qui est $3 + w$, doit être égale à celle de A, qui vaut 5. On peut terminer la détermination de u et v. Puisque $Ae_1 = 3e_1 - e_2$, on peut écrire : $Ae_1 = 2e_1 + (e_1 - e_2) = 2e_1 + v_2$. Autrement dit, $u = 0$ et $v = 1$, c'est-à-dire que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième solution. Comme la dernière ligne de A est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'espace F engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique, e_1 et e_2, est stable par A. En effet, on a $Ae_1 = 3e_1 - e_2$ et $Ae_2 = e_1 + e_2$. Or, le calcul du polynôme caractéristique de A montre que la restriction ψ à F de l'endomorphisme φ_A, dont la matrice est $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, est $(X-2)^2$. Comme ce polynôme est scindé, il existe dans F une base dans laquelle la matrice de ψ est triangulaire. Pour la trouver, il suffit de compléter $(1, -1, 0)$ en une base de F, par exemple en ajoutant e_2. On a en effet : $Ae_2 = e_1 + e_2 = 1(e_1 - e_2) + 2e_2$.

Enfin, on complète $\big((1, -1, 0), (0, 1, 0)\big)$ en une base de $\mathbb{R}^3$ en « ajoutant » la base de $\ker(A - \mathrm{I}_3)$. Posons ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad A = PTP^{-1}.$$

Autrement dit, dans la base $\big((1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, -1)\big)$, la matrice de φ_A est T.

Troisième solution. On complète le vecteur $(1, -1, 0)$ en une base de $\ker\big((A - 2\mathrm{I}_3)^2\big)$. Pour cela, on calcule :

$$(A - 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite, pour $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$v \in \ker(A - 2\mathrm{I}_3)^2 \iff \begin{cases} -z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff z = 0.$$

Une base est donnée par $\big((1, -1, 0), (0, 1, 0)\big)$. On termine comme dans la première solution.

Quatrième solution. D'après la question précédente, si la matrice de φ_A dans une base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire, elle est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } a,\ b,\ c \text{ réels convenables.}$$

Il est nécessaire que $u_1 \in \ker(A - 2\mathrm{I}_3)$, on peut prendre $u_1 = (1, -1, 0)$.

On complète $(v_2) = \big((1,-1,0)\big)$ en une base de $\mathbb{R}^3$ en ajoutant des vecteurs de la base canonique, par exemple e_2 et $e_3 = (0,0,1)$, puis on cherche $w_2 = \alpha e_2 + \beta e_3$ (avec $a \in \mathbb{R}$) tel que $Aw_2 = av_2 + 2w_2$. Cela s'écrit :

$$Aw_2 = av_2 + 2w_2 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha \qquad = -a + 2\alpha \\ \qquad \beta = 2\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = 0. \end{cases}$$

On peut donc prendre $\alpha = a = 1$ et $\beta = 0$, puis on termine comme dans la première solution.

4. On a vu que la matrice de φ_A dans $\big((1,-1,0),(0,1,0),(0,1,-1)\big)$ est $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On cherche à résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Avant de résoudre quoi que ce soit, on trouve les éléments propres de A. Son polynôme caractéristique est :

$$p_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ 2 & -X \end{vmatrix} = X(X-3) + 2 = X^2 - 3X + 2.$$

(Variante : $p_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 3X + 2$.) On voit une solution évidente, -1, puis on calcule l'autre car le produit des deux racines vaut 2 (ou bien on utilise le discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 2$).

Soit $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $v \in \ker(A - \mathrm{I}_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \text{SSI} \quad 2x - y = 0.$$

Cette équation définit la droite engendrée par $v_1 = (1,2)$.

D'autre part, $v \in \ker(A - 2\mathrm{I}_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{SSI} \quad x - y = 0.$$

Cette équation définit la droite engendrée par $v_2 = (1,1)$.

Soient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on a d'après le cours : $A = PDP^{-1}$.

Résolvons à présent l'équation $X'(t) = AX(t)$. Pour t réel fixé, on a en notant $X(t) = \big(x(t), y(t)\big)$:

$$X'(t) = AX(t) \iff X'(t) = PDP^{-1}X(t) \iff P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t).$$

Posons $Y(t) = P^{-1}X(t) = \big(u(t), v(t)\big)$, l'équation devient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ 2v(t) \end{pmatrix} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = 2v(t). \end{cases}$$

On sait qu'il existe deux constantes α et β telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = \alpha \mathrm{e}^t \\ v(t) = \beta \mathrm{e}^{2t}, \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} u(t) + v(t) \\ 2u(t) + v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{2t} \\ 2\alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

2. Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, on utilise encore $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On calcule

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a pour tout t :

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) + B(t) &\iff X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t) \iff Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t) \\ &\iff \begin{cases} u'(t) - u(t) = -t^2 \\ v'(t) - 2v(t) = 2t^2. \end{cases} \end{aligned}$$

On cherche une solution de la première équation sous la forme $u(t) = at^2 + bt + c$, où a, b et c sont des constantes à déterminer. L'équation s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ -at^2 + (2a-b)t + (b-c) = -t^2 \iff \begin{cases} -a = -1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2. \end{cases}$$

D'où une solution particulière : $u(t) = t^2 + 2t + 2$ pour tout t.

On reprend la même forme pour la deuxième équation : $v(t) = at^2 + bt + c$, d'où l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ -2at^2 + (2a-2b)t + (b-2c) = 2t^2 \iff \begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

D'où une solution particulière : $v(t) = -t^2 - t - 1/2$ pour tout t. On revient à X :

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 2 - t^2 - t - 1/2 \\ 2(t^2 + 2t + 2) - t^2 - t - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \dfrac{3}{2} \\ t^2 + 3t + \dfrac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

3. La solution générale est la somme de la solution particulière avec second membre et de la solution générale du système homogène. On en conclut qu'il existe α et β constants tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{2t} + t + \dfrac{3}{2} \\ 2\alpha e^t + \beta e^{2t} + t^2 + 3t + \dfrac{7}{2} \end{pmatrix}.$$