# Chapitre 8

# Introduction aux espaces $L^p$

Dans ce chapitre, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désignera un espace mesuré ; on va travailler en identifiant les fonctions si elles coïncident $\mu$-presque partout. Autrement dit, on écrira $f = g$ quand $\mu(\{x \colon f(x) \neq g(x)\}) = 0$ ; en particulier, $f = 0$ signifiera que $f$ vaut 0 presque partout. Par exemple, si $f$ est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, on pourra écrire $f = 0$.

## 8.1 L'espace $L^\infty$

**Définition 8.1.** Soit $f \colon X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On dit que $M \in [0, +\infty]$ est un *majorant essentiel* de $f$ si $\mu(\{x \colon f(x) > M\}) = 0$, autrement dit, si $f \leq M$ presque partout.

On définit $\|f\|_\infty$ comme le plus petit majorant essentiel de $|f|$.

**Définition 8.2.** L'espace $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, qu'on notera simplement $L^\infty(X)$ quand il n'y a pas de risque de confusion, est l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f$ telles que $\|f\|_\infty < +\infty$ [i].

**Proposition 8.3.** $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace normé.*

*Démonstration.* Commençons par vérifier l'axiome de séparation : $\|f\|_\infty = 0$ est équivalent à dire que $\mu(\{x \colon |f(x)| > 0\}) = 0$, autrement dit que $f = 0$ (presque partout).

Ensuite, notons que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $M$ est un majorant essentiel de $f \in L^\infty(X)$ si et seulement si $|\lambda| M$ est un majorant essentiel de $\lambda f$. Il suit que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.

Enfin, vérifions l'inégalité triangulaire : soit $f, g \in L^\infty(X)$. Alors on a

$$\mu(\{x \colon |f(x)| > \|f\|_\infty \text{ ou } |g(x)| > \|g\|_\infty\}) = 0$$

puisque cet ensemble est la réunion de deux ensembles de mesure nulle. Par conséquent, $\mu$-presque partout on a $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ et $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$, donc aussi $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. On vient de montrer que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant essentiel de $f + g$, ce qui revient à dire que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

**Proposition 8.4.** *L'inégalité de Hölder reste vraie pour les exposants conjugués* $1, +\infty$ *: si* $f, g$ *sont mesurables,* $\|f\|_1 < +\infty$ *et* $\|g\|_\infty < +\infty$*, alors* $fg$ *est intégrable et* $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

*Démonstration.* Il suffit de noter que, $\mu$-presque partout, on a $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$, et donc $|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty$. En intégrant cette inégalité, on obtient bien

$$\|fg\|_1 = \int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \int_X |f(x)| \|g\|_\infty d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty \ .$$

□

i. Répétons pour la dernière fois que deux fonctions sont identifiées si elles coïncident presque partout ; notons que si $f = g$ presque partout alors $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.

## 8.2 Les espaces $L^p$

**Définition 8.5.** Soit $p \in [1, +\infty[$. L'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, noté $L^p(X)$ quand il n'y a pas de risque de confusion, est l'espace vectoriel formé par les fonctions $f$ telles que $\|f\|_p < +\infty$.

On voudrait montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(X)$ ; l'axiome de séparation n'est pas difficile à montrer : on a bien $\|0\|_p = 0$ ; et réciproquement, si $\|f\|_p = 0$ alors $\int_X |f(x)|^p d\mu = 0$, ce qui n'est possible (comme $|f(x)|^p \geq 0$ pour tout $x$) que si $|f(x)|^p = 0$ $\mu$-presque partout, c'est-à-dire si $f = 0$ (presque partout).

L'axiome d'homogénéité se vérifie également très facilement : pour $f \in L^p(X)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$|\lambda f|_p = \left( \int_X |\lambda f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( |\lambda|^p \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p .$$

L'inégalité triangulaire est plus difficile à établir.

**Théorème 8.6** (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$ et $f, g \in L^p(X)$. Alors $f + g \in L^p(X)$ et $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

*Démonstration.* On a déjà traité le cas $p = +\infty$, et le cas $p = 1$ est simplement l'inégalité triangulaire habituelle. Supposons donc $p \in ]1, +\infty[$ et $f, g \in L^p(X)$.

Commençons par montrer que $\|f + g\|_p < +\infty$. Comme $x \mapsto x^p$ est convexe et croissante, on a pour tout $x$ que

$$\left( \left| \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} g(x) \right| \right)^p \leq \left( \left| \frac{1}{2} f(x) \right| + \left| \frac{1}{2} g(x) \right| \right)^p \leq \frac{1}{2} |f(x)|^p + \frac{1}{2} |g(x)|^p .$$

En intégrant cette inégalité, on obtient que

$$\frac{1}{2^p} \|f + g\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)) .$$

Ceci nous prouve que $\|f + g\|_p < +\infty$.

Maintenant, notons $q = \dfrac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de $p$. Ci-dessous, on va utiliser l'inégalité de Hölder, et le fait que

$$\left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q = \left( \int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \int_X |f + g|^p \right)^{1 - \frac{1}{p}} = \|f + g\|_p^{p-1} .$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu \\
&\leq \int_X (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu \\
&= \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \|f\|_p \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Si jamais $\|f + g\|_p = 0$ on n'a rien à démontrer ; sinon, en divisant des deux côtés par $\|f + g\|_p^{p-1}$ on obtient finalement $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. □

Il y aurait beaucoup de choses à dire sur les espaces $L^p$ ; en particulier, étudier la convergence de suites dans les espaces $L^p$ et ses relations avec d'autres modes de convergence (en proba, convergence simple) est un sujet riche et important. Dans la fin de ce chapitre, on va supposer que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilité (pour se simplifier la vie), justifier le choix de la notation $\|f\|_\infty$ et voir que la convergence $L^p$ entraîne la convergence en probabilité.

**Proposition 8.7.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $f: X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors on a*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \ .$$

*Démonstration.* Commençons par remarquer que l'on a toujours

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\|f\|_\infty^p \mu(X))^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty \ .$$

Par conséquent, si $\|f\|_p \to +\infty$ quand $p \to +\infty$ alors $\|f\|_\infty = +\infty$. Pour voir la réciproque, notons que pour $t < \|f\|_\infty$ fixé, l'ensemble $A_t = \{x : |f(x)| > t\}$ est de mesure strictement positive, par conséquent

$$\|f\|_p \geq (t^p \mu(A_t))^{\frac{1}{p}} = t\mu(A_t)^{\frac{1}{p}} \to t \text{ quand } p \to +\infty \ .$$

Ceci montre que si $\|f\|_\infty = +\infty$ alors $\|f\|_p$ tend vers $+\infty$ ; mais aussi que, si $\|f\|_\infty < +\infty$ on a pour tout $\varepsilon > 0$ que pour $p$ suffisamment grand $\|f\|_\infty - \varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. □

**Définition 8.8.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité. Une *variable aléatoire* est une fonction mesurable $f: X \to [0, +\infty]$.

**Remarque 8.9.** Ici nos notations sont différentes de celles qui sont communément utilisées en probabilités : souvent la variable aléatoire est notée $X$, l'espace de départ $\Omega$, et la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Cela ne jouera pas vraiment de rôle ici donc on garde les notations utilisées précédemment dans le cours.

**Définition 8.10.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et $(f_n)$ une suite de variables aléatoires. On dit que $f_n$ *converge en probabilité* vers une variable aléatoire $f$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \ .$$

**Théorème 8.11.** *Soit $p \in [1, +\infty]$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et $(f_n)$ une suite de variables aléatoires telles que $f_n \in L^p(X)$ pour tout $n$ et la suite $(f_n)$ converge vers $f$ dans $L^p(X, \mu)$. Alors $(f_n)$ converge vers $f$ en probabilité.*

*Démonstration.* Si $p = +\infty$ le résultat est immédiat puisque quel que soit $\varepsilon > 0$, pour $n$ suffisamment grand on a $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ et donc $\mu\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$.

Supposons donc $p < +\infty$, fixons $\varepsilon > 0$ et considérons l'ensemble $A_n = \{x : |f_n(x) - f(x)\| \geq \varepsilon\}$. Sur $A_n$, on a $|f_n - f|^p \geq \varepsilon^p$, et donc

$$\varepsilon^p \mu(A_n) \leq \int_X |f_n - f|^p d\mu \ .$$

Autrement dit, $\mu(A_n) \leq \dfrac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p}$, et le terme de droite tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ puisque $\|f_n - f\|_p$ tend vers 0. □

On pourrait aussi se demander quel est le rapport entre convergence $L^p$ et convergence presque sûre. Le résultat suivant est une conséquence facile du théorème de convergence dominée, et la preuve est laissée en exercice.

**Proposition 8.12.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$, et $(f_n)$ une suite de fonctions dans $L^p(X)$ telles que $f_n(x)$ converge simplement vers une limite $f(x)$ (presque partout), et supposons qu'il existe une fonction $g \in L^p(X)$ telle que pour tout $n$ on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout. Alors $f \in L^p(X)$ et $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $p$ tend vers $+\infty$.*

Réciproquement, on a le résultat suivant, qu'on se contente de mentionner ici sans démonstration.

**Théorème 8.13.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$, et $(f_n)$ une suite d'éléments de $L^p(X)$ qui converge vers $f$ dans $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$. Alors il existe une suite extraite $(f_{n_k})$ telle que $(f_{n_k}(x))$ tend vers $f(x)$ presque partout.*

**Exercice 8.14.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)$ une suite d'éléments de $L^\infty(X)$ qui converge vers $f$ dans $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que $(f_n(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout. Montrer que la réciproque est fausse.