
Interrogation I

Durée 30mn

QUESTION DE COURS.

Soit (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques. Pour une application $f: X \rightarrow Y$, rappeler les définitions de

1. f est continue sur X ;
2. f est uniformément continue sur X ;
3. f est lipschitzienne sur X .

EXERCICE.

1. Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction telle que $f(0) = 0$, f est strictement croissante et pour tout x, y on ait $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Montrer que la fonction d définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad d(x, y) = f(|x - y|)$$

est une distance sur \mathbb{R} .

2. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(x, y) = \ln(1 + |x - y|).$$

Montrer que d définit une distance sur \mathbb{R} .

3. (Question bonus) La distance d est-elle équivalente à la distance euclidienne ? Justifier.