2016/2017 Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I Topologie et Théorie de la mesure

Feuille d'exercices V.

Intégration, Théorèmes de convergence

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. On suppose que f est une fonction mesurable sur X à valeurs strictement positives.
Montrer que, pour toute suite (A_n) de parties dans $\mathcal{A}$, si $\displaystyle\int_{A_n} f d\mu$ converge vers 0 alors $(\mu(A_n))$ converge vers 0 (on pourra utiliser le fait que pour tout $p > 0$ on a $A_n \subseteq \{x \in X \colon f(x) < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n \colon f(x) \geq \frac{1}{p}\}$).

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f \colon X \to [0, +\infty]$ une fonction intégrable sur X.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \{x \in X \colon f(x) \geq n\}$. Montrer que la suite $\int_X f \mathbf{1}_{X_n} d\mu$ converge vers 0.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon \ .$$
(On pourra commencer par traiter le cas où f est bornée)

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles, et f une fonction mesurable à valeurs réelles. On dit que (f_n) *converge vers f en mesure* si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(\{x \in X \colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

1. Montrer que si $\int_X |f_n - f| d\mu$ tend vers 0 alors (f_n) converge vers f en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
2. Montrer que si (f_n) converge vers f presque sûrement alors (f_n) converge vers f en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
3. On suppose que (f_n) converge vers f en mesure, et qu'il existe une fonction $g \colon X \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ presque partout pour tout $n \geq 1$.
   (a) Montrer que $|f| \leq g$ presque partout.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent).

Exercice 4. 1. Montrer que $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right) dx = \ln(2)$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 5. 1. Pour $t \in]0,+\infty[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$. Calculer $f(t)$.

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx < +\infty$.
En fonction de la valeur de α, déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Commenter ce résultat.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 9. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n}) dx$.

Exercice 10. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Exercice 11. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin(x))^n\, dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\, dx$.

Exercice 12. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f.
2. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x)dx.$$
3. Vérifier que pour tout $t \geq 0$, on a $1 - t \leq e^{-t}$.
4. En déduire que la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$
6. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 13. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer.

Exercice 14. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives intégrables sur $\mathbb{R}$ convergente vers 0 presque partout.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n$ converge presque partout vers une fonction positive f intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ est convergente et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n\right) d\lambda.$$

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.
2. Soit $k \geq 0$. Montrer que

$$\int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} \frac{\sin t}{t} dt \geq \frac{1}{3(2k+1)}.$$

3. En déduire que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (au sens de Lebesgue).
4. Une autre méthode pour montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue :
   (a) Par la même méthode que ci-dessus, montrer que $\int_{1}^{+\infty} \frac{cos(2t)}{t} dt$ est semi-convergente.
   (b) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \quad .$$

   (c) En déduire que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (au sens de Lebesgue).

Exercice 16. Soit $E = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de comptage μ. On rappelle que μ est définie par $\mu(A) = \mathrm{Card}(A)$ si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ sinon. On se donne une application $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

1. Vérifier que u est mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$.
2. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, l'application $u_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$u_k(n) = \begin{cases} u(n) & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } k < n. \end{cases}$$

   Montrer que (u_k) est une suite de fonctions étagées croissant vers u.
3. Calculer $\int_{\mathbb{N}} u_k d\mu$, en déduire $\int_{\mathbb{N}} u d\mu$.
4. Soit $(v_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, le terme $v_{k,n}$ soit positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_{k,n})$ croisse vers v_n. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

5. En déduire que, si une suite $(w_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est telle que $w_{n,m}$ soit positif pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ alors on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} w_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} w_{n,m}$$

   (C'est-à-dire qu'on peut sommer d'abord par rapport à m puis par rapport à n, ou bien d'abord par rapport à n puis par rapport à m, et obtenir le même résultat dans les deux cas)