Feuille d'exercices IV.

Tribus et mesures.

Exercice 1. Rappeler la définition d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{A}$ alors $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \Delta B$ appartiennent également à $\mathcal{A}$.

Exercice 2. Soit X un ensemble, et B une partie de X. Montrer que

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \colon A \supseteq B \text{ ou } X \setminus A \supseteq B\}$$

est une tribu.

Exercice 3. Soit X un ensemble, et $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur X. Alors $\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}_i$ est une tribu.

Exercice 4. Quelle est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par $\{\{x\} \colon x \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 5. Vérifier que les ensembles suivants engendrent les boréliens de $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{I}_1 = \{]a, b[\colon a,\ b \in \mathbb{R} \text{ et } a < b\}$.
- $\mathcal{I}_2 = \{[a, b] \colon a,\ b \in \mathbb{Q} \text{ et } a < b\}$.
- $\mathcal{I}_3 = \{]a, +\infty[\colon a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6. Montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ est la tribu engendrée par les boules ouvertes.

Exercice 7. Montrer que les pavés $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ engendrent les boréliens de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Soit X, Y deux ensembles et $f \colon X \to Y$ une fonction. Démontrer que :
1. Si $\mathcal{B}$ est une tribu de parties de Y, alors $\{f^{-1}(B) \colon B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu de parties de X.
2. Si $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de X, alors $\{B \in \mathcal{P}(Y) \colon f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de parties de Y.

Exercice 9. Rappeler les définitions des mesures de comptage et de Dirac vues en cours ; vérifier que ce sont bien des mesures.

Exercice 10. Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue λ, et on considère

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n + \frac{1}{2^n}] \ .$$

Justifier que A est borélien, et calculer $\lambda(A)$.

Exercice 11. Démontrer qu'il n'existe pas de mesure μ finie et non nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ qui soit invariante par translation, i.e. $\mu(p + A) = \mu(A)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $A \in P(\mathbb{Z})$.

Exercice 12. Montrer que $\mathbb{Q}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Rappeler les définitions des fonctions mesurables à valeurs réelles et des fonctions mesurables entre des espaces mesurables quelconques.
Montrer que, si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, $f\colon X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.
Montrer qu'on obtient encore la même définition en demandant simplement que $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ pour tout intervalle ouvert I.

Exercice 14. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f la fonction caractéristique d'une partie $A \in \mathcal{A}$, vue comme une fonction de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable.

Exercice 15. Montrer que l'addition $(x, y) \mapsto x + y$ et la multiplication $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont boréliennes.

Exercice 16. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f, g deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f + g$ et fg sont mesurables.

Exercice 17. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ est borélienne et nulle presque partout.

Exercice 18. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ une fonction mesurable. Soit l'application ν définie sur $\mathcal{B}$ par $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ pour $B \in \mathcal{B}$. Montrer que ν est une mesure sur Y. On écrit alors $\nu = f_*\mu$.

Exercice 19.

1. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et
$$F(t) = \mu(]-\infty, t])$$
la fonction de répartition de μ. Montrer que F est continue en a si, et seulement si, $\mu(a) = 0$.
2. Montrer que, pour tout borélien A, de mesure de Lebesgue $\lambda(A)$ finie, et tout $t \in [0, \lambda(A)]$, il existe un borélien B contenu dans A et tel que $\lambda(B) = t$ (on pourra penser à utiliser le résultat de la question précédente, avec μ la mesure définie sur les boréliens de $\mathbb{R}$ par $\mu(B) = \lambda(B \cap A)$).

Exercice 20. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et (A_k) une suite de parties de X telles que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) < +\infty$.

1. Montrer que l'ensemble des x qui appartiennent à une infinité de A_k est égal à $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$.
2. Montrer que cet ensemble est négligeable.