RÉVISION

Exercice 1. (Exercice 7, Fiche 7) Étudier la nature des séries $\sum u_n$ de termes généraux :

$$(1)\ \ u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad (2)\ \ u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \qquad (3)\ \ u_n = (-1)^n \ln(\frac{n+1}{n-1}), \qquad (4)\ \ u_n = \frac{1}{3^n \mathrm{ch} n},$$

$$(5)\ \ u_n = \frac{\ln n}{n}, \qquad (6)\ \ u_n = \frac{\ln n}{n2^n}, \qquad (7)\ \ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, \qquad (8)\ \ u_n = (1+\sqrt{n})^{-n},$$

$$(9)\ \ u_n = \frac{1}{4^n \ln(2+\frac{1}{n})}, \qquad (10)\ \ u_n = \frac{1}{4^n \ln(1+\frac{1}{n})}.$$

Corrigé.

(1) $\quad u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}, n \geq 1$. On a

$$u_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n^2(1+\frac{1}{n})} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ sont à termes positifs, comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, d'après le critère des équivalents, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

(2) $u_n = \dfrac{2n-1}{n(n^2-4)}$, $n \geq 3$. De même ici, on a :

$$u_n = \frac{2n(1-\frac{1}{2n})}{n^3(1-\frac{4}{n^2}} \sim_{+\infty} \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}.$$

De même ici, comme $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2}{n^2}$ sont à termes positifs, comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, d'après le critère des équivalents, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

(3) $\quad u_n = (-1)^n \ln(\dfrac{n+1}{n-1})$, $n \geq 2$. On a, pour tout $n \geq 2$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \geq 0$$

et donc $|u_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ et $u_n = (-1)^n |u_n|$. La série est donc une série alternée. Comme :

— $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right) = 0$,

— la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour tout $n \geq 2$:

$$n-1 \leq n \Rightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow 1+\frac{2}{n} \leq 1+\frac{2}{n-1} \Rightarrow \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \leq \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$

et donc $|u_{n+1}| \leq |u_n|$,

d'après le critère des séries alternées, $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.

Complément : On voit que cette série n'est pas absolument convergente ! En effet, on a $\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}$ est une série divergente (la série harmonique).

(4) $u_n = \dfrac{1}{3^n \mathrm{ch} n}, n \geq 0$. Ici, on peut utiliser le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n ch(n)}{3^{n+1} ch(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \times \frac{1+e^{-2n}}{e+e^{-2n+1}} = \frac{1}{3e} < 1.$$

Donc la série est convergente.

(5) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}, n \geq 1$. Pour tout $n \geq 3$ et donc $n \geq e$, on a

$$\ln(n) \geq \ln(e) = 1 \text{ et donc } \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente, par le critère de comparaison la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

(6) $u_n = \dfrac{\ln n}{n2^n}, n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(n) \leq n \text{ et donc } \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ sont à termes positifs et comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, par le critère de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Complément : On aurait pu aussi utiliser le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \times \frac{2^n}{2^{n+1}} \times \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

et donc la série est convergente.

(7) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, n \geq 1$. La série est alternée avec $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Comme $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, d'après le critère des séries alternées, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente. On remarque ici que $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ et donc la série n'est pas absolument convergente.

(8) $u_n = (1+\sqrt{n})^{-n}, n \geq 0$. La série est à termes positifs et on a :

$$u_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}\right)^n \sim (\frac{1}{\sqrt{n}})^n.$$

En utilisant le critère de Cauchy, la série $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{\sqrt{n}})^n$ est convergente. Par le critère des équivalents, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

(9) $u_n = \dfrac{1}{4^n \ln(2+\frac{1}{n})}, n \geq 1$. La série est à termes positifs et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n \ln(2)}{4^n \ln(2+\frac{1}{n})} = 1.$$

Donc $u_n \sim \frac{1}{4^n \ln(2)}$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n \ln(2)}$ est convergente (série géométrique de raison < 1), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

(10) $u_n = \dfrac{1}{4^n \ln(1+\frac{1}{n})}, n \geq 1$. Comme $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, on a $u_n \sim \frac{n}{4^n}$. En utilisant le critère de D'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{4^n}$ est convergente et en utilisant le critère des équivalents, on déduit la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 2. (Exercice 19, Fiche 8) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R.

Corrigé.

1. On a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. La série entière de terme générale $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ a comme rayon de convergence 1 en utilisant le critère de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1.$$

Donc la série entière $\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n$ a comme rayon de convergence $R = 1$.

2. Pour $x = 1$, on obtient la série $\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Comme $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, par le critère des équivalents, la série $\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est divergente.

Pour $x = -1$, on obtient la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$. C'est une série alternée avec $(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui tend vers 0. D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est convergente.

Exercice 3. (Exercice 5, Fiche 9) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - xy' - y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence
$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$
3. Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence.

Corrigé.

1. D'après la formule de Taylor-Maclaurin,

$$a_0 = \frac{y(0)}{0!} = y(0) = 1,\ a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = y'(0) = 0.$$

2. On a

$$y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1},\ xy'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^n,$$

et

$$y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

En remplaçant dans (E),

$$\begin{aligned} y''(x) - xy'(x) - y(x) &= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n\geq 1} n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n\geq 1}(n+1)a_n x^n - a_0 \\ &= (2a_2 - a_0) + \sum_{n\geq 1}(n+1)((n+2)a_{n+2} - a_n)x^n. \end{aligned}$$

D'où

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0,\ a_{n+2} = \frac{1}{n+2}a_n \text{ pour tout } n \geq 1,$$

ce qu'on peut réécrire

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-2},\ \text{pour tout } n \geq 2.$$

3. Par récurrence sur n,

$$a_{2k} = \frac{1}{2k}a_{2(k-1)} = \frac{1}{(2k)(2(k-1))}a_{2(k-2)}$$

et donc

$$a_{2k} = \frac{1}{(2k)(2(k-1))\cdots 2}a_0 = \frac{1}{2^k k!}.$$

De même

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{1}{2k+1}a_{2k-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}a_{2k-3} \\ &= \frac{1}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 1}a_1 = 0, \end{aligned}$$

car $a_1 = 0$.

4. La série obtenue est

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!}x^{2n}.$$

Calculons le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!}x^n$. Par la règle de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$. Il est en de même pour la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!}x^{2n}$.