Fiche 4 - Réduction des endomorphismes

Exercice 1. On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres des matrices A, B et C ?
2. Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ?

Exercice 2. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Calculer les valeurs propres de A.
3. Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.
4. Justifier pourquoi A est diagonalisable.
5. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A est représentée par une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice inversible P vérifiant $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3. Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - 2z, 2y, y + z).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de f.
3. Montrer que f est diagonalisable et expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 4. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Expliciter en fonction de n les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = v_0 = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5. (*Diagonalisation*) Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base Can est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de L est une matrice diagonale D que l'on précisera.
2. Donner les équations dans la base $\mathcal{B}$ de 3 plans vectoriels stables par L.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel réel et L un endomorphisme de V. On suppose que L possède une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si L est inversible, alors λ^{-1} est valeur propre de L^{-1}.

Exercice 7. Soit A une matrice 3×3 de valeurs propres $1, 2, 3$ correspondant respectivement aux vecteurs propres $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. On suppose que

$$\vec{v} = \vec{b}_1 - 4\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3.$$

Calculer $A^5\vec{v}$.

Exercice 8. Montrer que si A est une matrice diagonalisable, alors $\det(A)$ est égale au produit des valeurs propres de A.

Exercice 9. (*Application aux suites récurrentes*) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ formée par des vecteurs propres de A et préciser une matrice diagonale semblable à A.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique Can de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle déterminée par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
   En remarquant que pour tout $n \geqslant 2$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et u_1 pour $n \geqslant 2$.

Exercice 10. Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, y).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de f.
3. Montrer que f est diagonalisable et expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 11. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.

3. On suppose $a = 0$.
   (a) Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.
   (b) En déduire que A est diagonalisable.
   (c) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$f(x, y) := (x - y, y).$$

1. Déterminer les matrices A et A' de f dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B} = ((1, 2), (-1, -1))$.
2. Vérifier que le polynôme caracteristique P_A est le même que $P_{A'}$.
3. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
4. Est-ce que f est diagonalisable ? Si oui, diagonaliser f.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$f(1, 0) := (2, 0), \quad f(3, 1) = (0, 1).$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = ((1, 0), (3, 1))$.
2. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. Diagonaliser f.

Exercice 14. (*Systèmes différentielles*) On considére le systéme différentiel suivant

$$(S) \begin{cases} x'(t) = 3tx(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) = 2x(t) + 3ty(t) + e^{-t} \end{cases}$$

1. Montrer qu'on peut écrire (S) sous la forme matricielle

   $$X' = A(t)X + B(t)$$

   où

   $$A(t) = \begin{pmatrix} 3t & 2 \\ 2 & 3t \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la matrice $A(t)$ admet deux valeurs propres distinctes.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de $A(t)$.
4. Montrer que le système différentiel (S) est équivalent au système

   $$(S_1) \ \ X_1' = DX_1 + B_1(t)$$

   où D est une matrice diagonale.
5. Résoudre le système (S_1) et en déduire les solutions de (S).

Exercice 15. (*Systèmes différentielles*)

1. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \quad .$$

2. On considère le système d'équations différentielles couplées

   $$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -5x_1 + 4x_2 \, , \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= x_1 - 8x_2 \, , \end{aligned}$$

(a) Déterminer les modes normaux (c'est-à-dire les vecteurs propres de la matrice associée au système).

(b) Résoudre le système pour la condition initiale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ et $\frac{d}{dt}x_1(0) = \frac{d}{dt}x_2(0) = 0$. Est-ce que la solution est périodique ? Si oui, donner sa période.

Exercice 16. (*Matrices complexes*) Diagonaliser, si c'est possible, les matrices complexes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & i \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. (*Matrices complexes*) Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix},$$

où $j = e^{2\pi i/3}$, en précisant leur ordre de multiplicité (algébrique) [Rappel : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$].

Exercice 18. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.

Exercice 19. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égale à n. Soit L l'endomorphisme de E défini par $L(P)(X) = (X-1)P'(X)$. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres.

Exercice 20. La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Exercice 21. Diagonaliser la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$