CONTRÔLE CONTINU 3

Mercredi 07 décembre 2016

Durée : 1h

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (5 pts)

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ? (1 pt)
2. Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$. (2,5 pt)
3. Énoncer les conditions de Dirichlet (Du theorème de Dirichlet pour les séries de Fourier). (1,5 pt)

Exercice 1. (7 pts) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{\ln(1+n^{-2})}{n^\alpha}, \quad n \geq 1.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? (2 pts)
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle convergente ? (3 pts)
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$. (2 pts)

Exercice 2. (9 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et définie par

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \qquad \text{sur }]0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. (1 pt)
2. Montrer que le coefficient b_n de la série de Fourier de f est donné par :
$$b_n = \frac{1}{n}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$
(3 pts)
3. En déduire la série de Fourier de f. On notera sa somme Sf. (1 pts)
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (2 pts)
5. En déduire la valeur de la somme :
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n}.$$
(2 pts)