Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH3

Automne 2016

Fiche 3 - Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1. On considère les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=5 \\ y-z=7 \end{array}\right. \ ,\ (S_2)\ \left\{\begin{array}{c} x-y+2z=1 \\ x+y+4z=2 \end{array}\right.$$

1. Déterminer l'écriture matricielle des systèmes (S_1) et (S_2).
2. Déterminer les applications linéaires associées aux systèmes (S_1) et (S_2).
3. Dire si (S_1) et (S_2) admettent des solutions (sans les calculer).

Exercice 2. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x-y+3z=3 \\ y-z=1 \end{array}\right. \ ,\ (S_2)\ \left\{\begin{array}{c} x-y+2z=1 \\ x+y+4z=2 \end{array}\right. \ ,\ (S_3)\ \left\{\begin{array}{c} x+2y=1 \\ x-y=2 \\ x+3y=3 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, les systèmes :

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{c} x+y+z=\lambda+1 \\ \lambda x+y+(\lambda-1)z=\lambda \\ x+\lambda y+z=1 \end{array}\right. \ ,\ (S_2)\left\{\begin{array}{c} (2-\lambda)x+2y=0 \\ x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, les inverses des matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 \\ 3 & 5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 5 \\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5\end{pmatrix}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x-2y=1 \\ 2x+y=3 \end{array}\right.$$

Exercice 6. Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{c} 2x_1+x_2=0 \\ x_1+3x_2=0 \end{array}\right. \ ,\ (S_2)\left\{\begin{array}{c} 2x_1+x_2=3 \\ x_1+4x_2=3 \end{array}\right. \ ,\ (S_3)\left\{\begin{array}{c} 2x_1+x_2=3+2i \\ x_1+(4+i)x_2=3+i \end{array}\right.$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

a) $\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 5x+2y-z=0 \\ -3x-4y+3z=0\,. \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x-y+z=3 \\ 5x+2y-z=5 \\ -3x-4y+3z=1\,. \end{array}\right.$

c) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13\,. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+z+t=3 \\ x+2y+z+t=1 \\ x+y+2z+t=2 \\ x+y+z+2t=4 \\ x-y+z-t=0\,. \end{cases}$

Exercice 8. En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de x dans les systèmes linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-y=5, \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ y=3 \\ 2x+3y-z=1\,. \end{cases}$

En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de y dans les systèmes linéaires suivants :

c) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 4x+3y=2, \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ x+y+z=4 \\ 3x+2y+z=8\,. \end{cases}$

Exercice 9. (Suite Exercice 4) Calculer les inverses des matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}4 & 12 & -3\\ -1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & -5\end{pmatrix}.$$

Résoudre les systémes linéaires suivants :

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}.$$

$$B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}.$$

$$C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 7\\ -4\end{pmatrix}.$$

$$D\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 7\\ -4\end{pmatrix}$$

Exercice 10.

1. Déterminer pour quelles valeurs de a, b réelles le système suivant a une solution unique, n'a pas de solution, ou a une infinité de solutions :

$$\begin{cases} ax+2y+az=1 \\ ax+(a+4)y+3az=-2 \\ -ax-2y+z=1 \\ (a+2)y+(3a+1)z=b \end{cases}$$

2. Pour les systèmes homogènes suivants, indiquer s'ils ont une solution unique ou s'ils en ont une infinité, et dans le dernier cas indiquer la dimension de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x-2y-2z=0 \\ 4x+z=0 \\ 3z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ z-t=0 \end{cases}$$

Exercice 11. Inverser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$$