VI. Formes quadratiques

Bases q-orthogonales

Rappel (Définition d'une base q-orthogonale)

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

- Deux éléments $x, y \in E$ sont dit φ-**orthogonaux** si $\varphi(x, y) = 0$.
- On dit d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qu'elle est φ-**orthogonale** si e_i et e_j sont φ-orthogonaux pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique.

- Deux éléments $x, y \in E$ sont dit q-**orthogonaux** s'ils sont φ_q-orthogonaux.
- On dit d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qu'elle est q-**orthogonale** si e_i et e_j sont q-orthogonaux pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.

Rappel (Importance des bases q-orthogonales)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base q-orthogonale. Pour tout $x \in E$, dont l'écriture dans la base $\mathcal{B}$

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

on a

$$q(x) = \varphi_q(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_q(e_i, e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_q(e_i, e_j) x_i x_j$$

$$= q(e_1) x_1^2 + \cdots + q(e_n) x_n^2$$

et donc l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$ est plus simple.

Proposition (Importance des bases q-orthogonales)

Soient $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base q-orthogonale. Soit

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

l'expression analytique de q dans $\mathcal{B}$.

- q est non-dégénérée si et seulement si pour tout i, $\lambda_i \neq 0$.
- q est positive si et seulement si pour tout i, $\lambda_i \geq 0$.
- q est définie-positive si et seulement si pour tout i, $\lambda_i > 0$.

$\square$

Recherche d'une base q-orthogonale

Définition

1. Une application $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire s'appelle une **forme linéaire**.
2. L'espace des formes linéaires s'appelle le **dual** de E et est noté E^*.

Proposition

L'espace dual E^* est un espace vectoriel réel de dimension n (Rappel : $\dim(E) = n$). Plus précisément, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ où e_i^* est définie par

$$e_i^* : E \to \mathbb{R}, \quad e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

constitue une base de E^*.

Théorème (Méthode de réduction de Gauss)

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non-nulle. Alors il existe des formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_p$ linéairement indépendantes (dans E^* et donc $p \leq n$) et des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}^*$ vérifiant :

1. $q(x) = \alpha_1 \ell_1(x)^2 + \cdots + \alpha_p \ell_p(x)^2$, pour tout $x \in E$.
2. $\ker q = \{x \in E \mid \ell_1(x) = \cdots = \ell_p(x) = 0\}$ et $rg(q) = p$.
3. Soit $\mathcal{B}' = (\ell_1, \cdots, \ell_p, \ell_{p+1}, \cdots, \ell_n)$ une base de E^* complétant la famille libre $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $\ell_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ l'écriture canonique de ℓ_i dans la base $\mathcal{B}$. Soit
$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Alors P est inversible et les vecteurs colonnes de la **matrice inverse** P^{-1} constitue une base q-orthogonale de E.

Mise en pratique (Exemple 1 : forme quadratique avec carrés)

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et considérons la forme quadratique q définie par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2yz.$$

On commence par regrouper tous les termes où x figure :

$$q(x, y, z) = (2x^2 + 2xy) + y^2 + 2yz.$$

On utilise ensuite l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour avoir un terme de la forme $(\ell_1(x, y, z))^2$:

$$2x^2 + 2xy = 2(x^2 + xy) = 2(x^2 + 2x(\frac{y}{2}) + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4})$$

$$= 2((x + \frac{y}{2})^2 - \frac{y^2}{4}) = 2(x + \frac{y}{2})^2 - \frac{y^2}{2}.$$

On a :

$$q(x,y,z) = 2(x+\frac{y}{2})^2 - \frac{y^2}{2} + y^2 + 2yz = 2(x+\frac{y}{2})^2 + \frac{y^2}{2} + 2yz$$

On regroupe ensuite tous les termes qui restent où y figure (et ainsi de suite). On a

$$\frac{y^2}{2} + 2yz = (\frac{y}{\sqrt{2}})^2 + 2(\frac{y}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}z) + (\sqrt{2}z)^2 - (\sqrt{2}z)^2$$

$$= (\frac{y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z)^2 - 2z^2.$$

D'où

$$q(x,y,z) = 2(x+\frac{y}{2})^2 + (\frac{y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z)^2 - 2z^2$$

On a

$$\ell_1(x,y,z) = x + \frac{y}{2}, \quad \ell_2(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z, \quad \ell_3(x,y,z) = z.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calcul

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la famille $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ où

$$f_1 = (1, 0, 0),\ f_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 0),\ f_3 = (1, -2, 1)$$

est une base q-orthogonale.

Exercice

Vérifier que $\mathcal{C}$ est bien une base q-orthogonale.

Mise en pratique (Exemple 2 : forme quadratique sans carrés)

Soit $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et considérons la forme quadratique q définie par

$$q(x, y, z, t) = xy + xz + 2yz + zt.$$

On commence par regrouper les termes où x et y apparaissent, les termes où seulement x apparait et les termes où seulement y apparait. On a

$$q(x, y, z, t) = xy + xA(z, t) + yB(z, t) + zt,$$

où $A(z, t) = z$ et $B(z, t) = 2z$ dans notre cas.
On a

$$xy + xA(z, t) + yB(z, t) = x(y + A(z, t)) + yB(z, t)$$

$$\begin{aligned} &= x(y + A(z, t)) + yB(z, t) + A(z, t)B(z, t) - A(z, t)B(z, t) \\ &= (x + B(z, t))(y + A(z, t)) - A(z, t)B(z, t) \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'identité $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$ pour obtenir

$$xy + xA(z,t) + yB(z,t) =$$

$$\frac{1}{4}[(x+B(z,t)+y+A(z,t))^2-(x+B(z,t)-y-A(z,t))^2]-A(z,t)B(z,t),$$

ce qui donne dans notre cas

$$xy + xz + 2yz = \frac{1}{4}[(x+y+3z)^2 - (x-y-z)^2] - 2z^2$$

et

$$q(x,y,z,t) = \frac{1}{4}[(x+y+3z)^2 - (x-y-z)^2] - 2z^2 + zt.$$

L'application $(z,t) \mapsto -2z^2 + zt$ est une forme quadratique ayant moins de variable que q et on réapplique la même méthode.

On a

$$-2z^2 + zt = -2(z^2 + \frac{1}{2}zt) = -2(z^2 + 2z(\frac{t}{4}) + (\frac{t}{4})^2 - (\frac{t}{4})^2)$$

$$= -2((z + \frac{t}{4})^2 - \frac{t^2}{16}) = -2(z + \frac{t}{4})^2 + \frac{t^2}{8}.$$

D'où

$$q(x, y, z, t) = \frac{1}{4}[(x + y + 3z)^2 - (x - y - z)^2] - 2(z + \frac{t}{4})^2 + \frac{t^2}{8}.$$

Donc on prend

$$\ell_1(x, y, z, t) = x + y + 3z, \;\; \ell_2(x, y, z, t) = x - y - z,$$

$$\ell_3(x, y, z, t) = z + \frac{t}{4}, \;\; \ell_4(x, y, z, t) = t.$$

Corollaire (Existence des bases q-orthogonales)

Pour toute forme quadratique q, E admet des bases q-orthogonales. $\square$

Signature d'une forme quadratique

Théorème (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, q-orthogonale et des entiers r et s vérifiant :

1. $0 \leq r \leq r + s \leq n$,
2. $q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$,
3. $rg(q) = r + s$,
4. pour toute base q-orthogonale $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$, r est le nombre des vecteurs f_i tels que $q(f_i) > 0$ et s est le nombre de vecteurs f_i tels que $q(f_i) < 0$.

Définition

Le couple (r, s) ne dépendent que de q et s'appelle la **signature** de q.

Diagonalisation simultanée

Proposition

Supposons que E est euclidien et soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors il existe une base de E qui est à la fois orthonormée et q-orthogonale.

Preuve. La matrice de q est symétrique et est donc diagonalisable dans une base orthonormée qui va être aussi q-orthogonale. □

Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

I. 1. Suites numériques

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne le *corps* des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le *corps* des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Rappel

- Pour tout nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, il existe un unique couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. On a

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \; a = \rho \cos(\theta), \; b = \rho \sin(\theta).$$

- Si x est réel alors la valeur absolue $|x|$ coïncide avec le module de x.

Définition

Un suite numérique réelle est une suite de nombres réels

$$u_0, \cdots, u_n, \cdots$$

et une suite numérique complexe est une suite de nombres complexes

$$u_0, \cdots, u_n, \cdots$$

Formellement, c'est une application

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{K}, \\ n \mapsto u_n, \end{cases}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, selon on considère les suites réelles ou complexes.

- On note par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) la suite.
- On appelle u_n le terme général de la suite (u_n).

Une suite peut être définie de multiples façons :

- en donnant explicitement le terme général u_n en fonction de n :
  exemples : $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = (1+i)^n$, ...
- par récurrence :
  exemples : $u_{n+1} = u_n + 3$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$, ...
- par d'autres moyens plus ou moins théoriques ou pratiques :
  exemples : u_n est la n-ième décimale de π, u_n est la population mondiale en l'année n, ...
- $\cdots$

Remarque

L'espace des suites de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ \ \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Convergence

Définition

Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{K}$. On appelle disque de rayon r et de centre a dans $\mathbb{K}$, l'ensemble

$$D_r(a) = \{x \in \mathbb{K},\ |x - a| \leq r\}.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $z = x + iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$, alors

$$D_r(z_0) = \left\{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\right\}$$

  ce qui représente dans le plan un *disque* de rayon r et de centre (x_0, y_0).
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $D_r(a)$ est *l'intervalle* $[a - r, a + r]$.

Définition

Soit $a \in \mathbb{K}$. Un sous-ensemble $V \subseteq \mathbb{K}$ est appelé un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $D_r(a) \subseteq V$.

Convergence

Définition

Soient (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est la limite de (u_n) et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si pour tout $r > 0$, il existe $N_r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_r$, on ait $u_n \in D_r(a)$.

Définition équivalente

On dit que a est la limite de (u_n) et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si pour tout voisinage V de a, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_V$, on ait $u_n \in V$.

Convergence

On dit que (u_n) est convergente s'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemples

- $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- $u_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- $u_n = \frac{n}{n+1} + i\,\frac{2n^2}{n^2+2}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + 2i$.
- $u_n = z^n, z \in \mathbb{C}$, avec $0 \leq |z| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$.

Limite infinie

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si
$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \, (n \geq N_M \Rightarrow u_n \geq M).$$
- On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si
$$\forall M < 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \, (n \geq N_M \Rightarrow u_n \leq M).$$

Exemples

- $u_n = n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- $u_n = -\ln n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque

Si (u_n) est une suite complexe, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ n'a pas de sens.

Proposition

Soit (z_n) une suite de nombres complexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (z_n) est convergente,
2. les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ sont convergentes.

De plus $\lim_{n\to+\infty} z_n = a + ib$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) = a$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n) = b$.

Opérations sur les limites

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de $\mathbb{K}$, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite (λu_n) est convergente de limite $\lambda \ell_1$,
- la suite $(u_n + v_n)$ est convergente de limite $\ell_1 + \ell_2$,
- la suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite $\ell_1 \ell_2$,
- si $\ell_2 \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ pour n assez grand et u_n/v_n est convergente de limite ℓ_1/ℓ_2.

Comparaison des suites réelles

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ pour n assez grand. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Théorème des gendarmes

Soient (a_n), (b_n) et (u_n) trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} a_n \leq u_n \leq b_n \ \text{ pour } n \text{ assez grand,} \\ (a_n) \text{ et } (b_n) \ \text{ convergent vers une même limite } \ell. \end{cases}$$

Alors (u_n) est convergente de limite ℓ.

Proposition

Si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ alors la suite $(|u_n|)$ est convergente de limite $|\ell|$.

Preuve. Conséquence de la propriété

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|.$$

□

Rappel

Si (u_n) est une suite complexe alors $|u_n|$ est le module de u_n et si (u_n) est réelle alors $|u_n|$ est la valeur absolue de u_n.

Suites arithmétiques, géométriques

Suites arithmétiques

Soit $a, r \in \mathbb{K}$. La suite arithmétique de premier terme a et de raison r est la suite définie par récurrence par :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n + r. \end{array} \right.$$

Propriétés :

$$u_n = a + nr, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)a + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ est constante}$$

Suites géométriques

Soit $a, r \in \mathbb{K}$. La suite géométrique de premier terme a et de raison r est la suite définie par récurrence par :

$$\left\{ \begin{array}{rl} u_0 &= a, \\ u_{n+1} &= r u_n. \end{array} \right.$$

Propriétés :

$$u_n = a r^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \left\{ \begin{array}{c} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \text{ si } r \neq 1, \\ a(n+1) \text{ si } r = 1. \end{array} \right.$$

$$(u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow 0 \leq |r| < 1 \text{ ou } r = 1.$$

Définition

Une suite (u_n), réelle ou complexe, est dite bornée si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Définition

Une suite réelle (u_n) est dite majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M,$$

et minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n.$$

Propriété

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée. □

Théorème

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Suites monotones

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) est croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} \geq u_n,$$

décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} \leq u_n$$

et monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème

- Une suite réelle croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.
- Une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

I. 2. Séries numériques

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On s'intéresse à la somme du nombre infini de termes

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont on voudrait donner un sens et voir si elle est finie ou non. Informellement, c'est ce qu'on appelle une série.

L'idée est de considérer la suite (S_n) définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

et d'étudier sa convergence. Si (S_n) est convergente de limite ℓ, alors

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \ell$$

et on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell.$$

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$, la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- On appelle S_n la la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) si la suite (S_n) converge (resp. diverge).
- Si la série converge, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et est appelée la somme de la série $\sum u_n$.

Exemple : séries géométriques

Soient $z \in \mathbb{C}$ et soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = z^n$, qu'on appelle série géométrique de raison z. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1,\ S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1,\ S_n = n + 1.$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Si elle converge, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Exemple : série harmonique

La série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est appelée la série harmonique.
On a
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$
$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$
et donc la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Exemple : séries de Riemann

On appelle série de Riemann une série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition

Une série complexe de terme général u_n est convergente si et seulement si les deux séries réelles de terme général respectif $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$ sont convergentes.

Opérations sur les séries

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Théorème (Condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve. On a, pour $n \geq 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

et donc comme $\sum u_n$ est convergente, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0.$$

$\square$

Définition

On dit d'une série $\sum u_n$ qu'elle est grossièrement divergente si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Remarques

- Pour prouver la divergence de certaines séries, en montre que le terme général u_n ne tend pas vers 0.
  Exemple : la série de terme général $\ln n$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} \ln n \neq 0$.
- La réciproque est fausse en général.
  Exemple : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Convergence absolue

Définition

On dit de la série $\sum u_n$ qu'elle est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème

Une série absolument convergente est convergente et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Convergence absolue

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$. On a $|u_n| = 1/n^2$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente et donc convergente.

Définition

Lorsqu'une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série réelle de terme général u_n. On dit que la série est à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour n assez grand.

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors la suite (S_n) est croissante (à partir d'un certain rang)

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et donc pour prouver que la série $\sum u_n$ est convergente, il suffit de montrer que la suite (S_n) est majorée.

Si $\sum u_n$ est une série quelconque (réelle ou complexe), la série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et donc la convergence de cette dernière implique la convergence de la série initiale $\sum u_n$ (convergence absolue).

Séries à termes positifs : comparaison

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \leq v_n$, pour n assez grand.

- Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.
- Si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$