Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2016

V. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

V. 5. Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Nous avons vu à la section sur la réduction des endomorphismes qu'étant donnée une matrice A, on cherche une matrice diagonale D semblable à A ; ou d'une façon équivalente, on cherche une base $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Dans les espaces euclidiens ou hermitiens, où nous disposons d'un produit scalaire, on peut se demander, étant donnée une matrice A, s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Nous verrons que les matrices qui vérifient cette propriété dans les espaces euclidiens sont les matrices symétriques et dans les espaces hermitiens sont les matrices hermitiennes.

V. 5. 1. Matrices symétriques

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ une matrice de type (n, m) à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La transposée de A, notée ${}^tA$, est la matrice de type (m, n) définie par : pour $1 \leq j \leq n$, la colonne j de ${}^tA$ est égale à ligne j de A.

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition

On dit que A est symétrique si elle est égale à sa transposée.

$$A \text{ est symétrique si et seulement si } A = {}^tA.$$

Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique, alors que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

n'est pas symétrique car $B \neq {}^tB$

$${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable dans une base orthonormée s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ et une matrice diagonale D tels que

$$A = P_{Can\mathcal{B}} D P_{Can\mathcal{B}}^{-1}.$$

(Rappel : *Can* est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si A est symétrique.

Soient E un espace euclidien de dimension n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A sont deux-à-deux orthogonaux.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est symétrique, alors il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.

Que peut-on dire de plus sur la matrice P ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières ?

Elle est en fait orthogonale.

Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est orthogonale si $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I_n$. Autrement dit si P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La première représente une rotation d'angle θ et le seconde représente une symétrie orthogonale.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est semblable à une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soient E un espace euclidien de dimension n et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors P est orthogonale si et seulement si P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.

Mise en pratique

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et cherchons une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P tel que $A = PDP^{-1}$. Comme A est symétrique cela est possible.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Les sous-espaces propres sont

$$E_{-1/2}(A) = Vect((1,-1)),\ E_{5/2} = Vect((1,1))$$

et par conséquent, en posant $\vec{u} = (1,-1)$ et $\vec{v} = (1,1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de vecteurs propres de A. Pour avoir une base orthonormée, on prend les vecteurs unitaires

$$\vec{u}' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), \quad \vec{v}' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

et donc $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}')$ est une base orthonormée dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

On a finalement

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } A = PD\,{}^tP.$$

V. 5. 2. Matrices hermitiennes

Dans un espace hermitien, les matrices symétriques ne sont pas suffisantes pour caractériser les matrices diagonalisables dans des bases orthonormées.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La conjuguée de A, notée $\overline{A}$, est la matrice carrée (n, n) dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. La transconjuguée de A est la transposée de la conjuguée de A, elle est notée A^*.

Donc $A^* = {}^t\overline{A}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}, \ A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On dit que A est hermitienne si $A = A^*$.

Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \; \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \; B^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

et donc B est hermitienne.

Proposition

Soient E un espace hermitien de dimension n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si A est hermitienne.

Soient E un espace hermitien de dimension n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A sont deux-à-deux orthogonaux.

Soient E un espace hermitien de dimension n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même ici, si A est hermitienne, alors il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.

Que peut-on dire de plus sur la matrice P ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières ?

Dans le cas des espaces hermitiens, elle est en fait unitaire.

Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est unitaire si $P \cdot P^* = P^* \cdot P = I_n$.
Autrement dit si P est inversible et $P^{-1} = P^*$.

Proposition

Soient E un espace hermitien de dimension n et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors P est unitaire si et seulement si P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.

VI. Formes quadratiques, coniques

VI. 1. Introduction

Nous avons vu que si $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, alors par définition φ est un produit scalaire et la quantité

$$q(x) = \varphi(x, x) \geq 0$$

est positive. Elle permet de définir des propriétés géométriques comme la distance.

Or dans beaucoup d'applications, on a besoin de formes bilinéaires symétriques qui ne sont pas forcément définies positives.
On s'intéresse alors à l'étude de l'application

$$q : E \to \mathbb{R}, \quad q(x) = \varphi(x, x)$$

qu'on appelle forme quadratique.

VI. 2. Définitions, propriétés

Dans la suite E est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$.

Rappel

Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une **forme bilinéaire symétrique** si elle vérifie :

- φ est linéaire à gauche : pour tout $b \in E$ fixé, pour tout $x_1, x_2, x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x_1 + x_2, b) = \varphi(x_1, b) + \varphi(x_2, b), \ \varphi(\lambda x, b) = \lambda \varphi(x, b)$$

- φ est linéaire à droite : pour tout $a \in E$ fixé, pour tout $y_1, y_2, y \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(a, y_1 + y_2) = \varphi(a, y_1) + \varphi(a, y_2), \ \varphi(a, \lambda y) = \lambda \varphi(a, y)$$

- symétrie : pour tout $x, y \in E$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Définition 1

Une application $q : E \to \mathbb{R}$ s'appelle **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x)$.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. L'application

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle (x_1, \ldots, x_n) | (x_1, \ldots, x_n) \rangle$$

  est une forme quadratique.
- (Relativité restreinte) : L'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^4$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique, dont la forme quadratique associée est la *forme de Lorentz* :

$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2,$$

  où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique et soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi(x, x)$. Alors

$$q(x + y) = \varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(y, y) + 2\varphi(x, y)$$

et donc

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)].$$

Donc si $\varphi' : E^2 \to \mathbb{R}$ est une autre forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi'(x, x)$ alors

$$\varphi'(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] = \varphi(x, y).$$

Donc si q est une forme quadratique, il existe une **unique** forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$.

Proposition 1 (Caractérisation)

Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si et seulement si elle vérifie :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
2. L'application

$$\varphi_q : E \times E \to \mathbb{R},\ \ (x, y) \mapsto \varphi_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

   est une forme bilinéaire symétrique.

La forme φ_q s'appelle la **forme polaire** de q.

Preuve : Supposons que q est une forme quadratique et φ est une forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$.

(1) $q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x, x) = \lambda^2 q(x)$.

(2) On a

$$q(x + y) = \varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(y, y) + 2\varphi(x, y)$$

d'où : $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] = \varphi_q(x, y)$ et $\varphi = \varphi_q$. Donc φ_q est une forme bilinéaire symétrique.

Réciproque : on a

$$\varphi_q(x, x) = \frac{1}{2}[q(2x) - 2q(x)] = \frac{1}{2}[4q(x) - 2q(x)] = q(x)$$

et donc q est une forme quadratique. $\square$

Remarques

- Donc si q est une forme quadratique, il existe une **unique** forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$, qui est la forme polaire φ_q.
- Réciproquement : pour tout forme bilinéaire symétrique φ, il existe une unique forme quadratique q_φ, qui lui est associée, définie par $q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$.
- L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même l'ensemble $\mathcal{BS}(E)$ des formes bilénaires symétriques est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application

$$\mathcal{Q}(E) \to \mathcal{BS}(E), \;\; q \mapsto \varphi_q$$

est un isomorphisme dont l'inverse est

$$\mathcal{BS}(E) \to \mathcal{Q}(E), \;\; \varphi \mapsto q_\varphi.$$

Exemple

Soit

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Alors q est une forme quadratique et la forme polaire est

$$\varphi_q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{1}{2}[q(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - q(x_1, x_2) - q(y_1, y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 - y_2^2]$$

$$= \frac{1}{2}[2x_1 y_1 + 2x_2 y_2] = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

On retrouve le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

VI. 3. Écriture matricielle, expression analytique

Écriture matricielle

Définition 2

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tous $x, y \in E$, dont les écritures dans la base $\mathcal{B}$,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, \;\; y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n,$$

on a

$$\varphi(x, y) = \varphi(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{i=n} y_i e_i) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i y_j.$$

La matrice $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ s'appelle la **matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$** et est notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1.$$

On a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\varphi(x,y) = {}^tX\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)Y = {}^tY\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)X$$

où X (resp. Y) est la matrice-colonne des coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \cdots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_1)x_i & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_n)x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (\sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_1)x_i)y_1 + \cdots + (\sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_n)x_i)y_n$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} \varphi(e_i,e_j)x_iy_j$$

Exemple

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1.$$

On a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2)y_1 + (x_1 + 3x_2)y_2 = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1.$$

Propriétés

- φ est symétrique $\Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique.
- Si $M = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. symétrique) alors l'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i y_j$$

est une forme bilinéaire (resp. symétrique).

Définition 3

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_q)$ de la forme polaire φ_q s'appelle la **matrice de** q, par rapport à la base $\mathcal{B}$. C'est une matrice symétrique et est notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2$. On a

$$\varphi_q(e_1, e_1) = q(e_1) = 1,\ \varphi_q(e_1, e_2) = \frac{1}{2}[q(e_1 + e_2) - q(e_1) - q(e_2)] = 3/2$$

$$\varphi_q(e_2, e_1) = \varphi_q(e_1, e_2) = 3/2,\ \varphi_q(e_2, e_2) = q(e_2) = 2$$

et donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Montrer que toute forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ et que sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Remarque

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$q(x) = \varphi_q(x, x) = {}^tX \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) X$$

où X est la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 2 (Changement de base)

Soient $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tP\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)P.$$

$\square$

Expression analytique

Expression analytique

Soient $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, dont l'écriture dans la base $\mathcal{B}$

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

on a

$$q(x) = \varphi_q(x, x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi_q(e_i, e_j) x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_q(e_i, e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_q(e_i, e_j) x_i x_j.$$

La dernière expression est appelée **l'expression analytique** de q dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Toute forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de la forme

$$ax^2 + cy^2 + 2bxy$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. C'est l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$.

Règle de dédoublement des indices

Si

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} m_{ij} x_i x_j$$

est l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$, pour retrouver la forme polaire φ_q on procède comme suit :

- on remplace les termes x_i^2 par $x_i y_i$,
- on remplace les termes $x_i x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$.

Exemple

Soient $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. On applique la règle de dédoublement des indices :

$$\varphi_q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2[\frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2)]$$

et donc

$$\varphi_q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + y_1x_2.$$

Rang et noyau

Définition 4

Soient $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- On appelle **rang de** q le rang de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$.
- On appelle **noyau** de q, le sous-espace vectoriel

$$\ker q = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi_q(x, y) = 0\}.$$

Définition

On dit que q est :

- **non-dégénérée** si $\ker q = 0$,
- **positive** si $\forall x \in E$, $q(x) \geq 0$, i.e. si φ_q est positive,
- **définie-positive** si q est positive et $\forall x \in E$ $(q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$, i.e. si φ_q est définie-positive.

Proposition 3

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors q est non-dégénérée si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est inversible dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E. $\square$

VI. 4. Bases q-orthogonales

Bases q-orthogonales

Définition 5

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

- Deux éléments $x, y \in E$ sont dit φ-**orthogonaux** si $\varphi(x, y) = 0$.
- On dit d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ qu'elle est φ-**orthogonale** si e_i et e_j sont φ-orthogonaux pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique.

- Deux éléments $x, y \in E$ sont dit q-**orthogonaux** s'ils sont φ_q-orthogonaux.
- On dit d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ qu'elle est q-**orthogonale** si e_i et e_j sont q-orthogonaux pour tout $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.

Proposition 4

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Une base $\mathcal{B}$ est q-orthogonale si et seulement si la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale.

Preuve. Si $\mathcal{B}$ est q-orthogonale alors $\varphi_q(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et donc la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \varphi_q(e_1, e_1) & \cdots & \varphi_q(e_1, e_n) = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_q(e_n, e_1) = 0 & \cdots & \varphi_q(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

est diagonale. Réciproquement, si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale, alors le coefficient a_{ij} est nul pour $i \neq j$ et comme $a_{ij} = \varphi_q(e_i, e_j)$ en déduit que e_i et e_j sont q-orthogonaux (pour $i \neq j$) et donc $\mathcal{B}$ est q-orthogonale. $\square$

Importance des bases q-orthogonales

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base q-orthogonale. Pour tout $x \in E$, dont l'écriture dans la base $\mathcal{B}$

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

on a

$$q(x) = \varphi_q(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_q(e_i, e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_q(e_i, e_j) x_i x_j$$

$$= q(e_1) x_1^2 + \cdots + q(e_n) x_n^2$$

et donc l'expression analytique de q dans la base $\mathcal{B}$ est plus simple.

Proposition 5 (Importance des bases q-orthogonales)

Soient $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base q-orthogonale. Soit

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

l'expression analytique de q dans $\mathcal{B}$.

- q est non-dégénérée si et seulement si pour tout i, $\lambda_i \neq 0$.
- q est positive si et seulement si pour tout i, $\lambda_i \geq 0$.
- q est définie-positive si et seulement si pour tout i, $\lambda_i > 0$.

□