

Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2015

V. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

V. 1. Introduction

Nous avons vu que dans un espace vectoriel nous pouvons additionner des vecteurs et les multiplier par des scalaires.

Pouvons-nous aller plus et définir des notions comme les longueurs, les angles et l'orthogonalité ?

Le **produit scalaire** est une opération algébrique qui s'ajoute aux lois s'appliquants aux vecteurs et qui permet donc d'utiliser les notions usuelles de la géométrie euclidienne traditionnelle en dimension deux ou trois, comme les longueurs, les angles et l'orthogonalité.

Il permet d'étendre ces notions à des espaces vectoriels réels de toute dimension, et aux espaces vectoriels complexes.

Nous distinguerons le cas réel et le cas complexe pour définir le produit scalaire.

V. 2. Produit scalaire

V. 2. 1. Produit scalaire réel

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **forme bilinéaire** si :

- **φ est linéaire à droite** : pour tout $a \in E$ fixé, l'application $\varphi_a : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ est linéaire.
- **φ est linéaire à gauche** : pour tout $b \in E$ fixé, l'application $\varphi_b : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$ est linéaire.

Exemple

En prenant $E = \mathbb{R}$ l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x, y) = xy$$

est une forme bilinéaire sur E . En effet :

- φ est linéaire à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = ay$ est évidemment linéaire.
- φ est linéaire à gauche : pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est évidemment linéaire.

On remarque par contre que φ elle-même n'est pas linéaire (exercice).

Définition

Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est

- **symétrique** si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$.
- **positive** si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- **définie positive** si elle est positive et si pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Exemple

Dans \mathbb{R}^2 , l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$$

est une forme bilinéaire (exercice) symétrique et définie positive. En effet :

- φ est symétrique : on a

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = \varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$

et donc φ est symétrique.

- φ est définie positive : on a

$$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$ si et seulement si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire sur E qui est symétrique et définie positive.

- Un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien**.
- Un \mathbb{R} -espace vectoriel de **dimension finie** muni d'un produit scalaire est appelé un espace **euclidien**.

Notation

Si $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y \rangle$.

Exemple : Produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n

Dans \mathbb{R}^n , le produit scalaire **canonique**, est défini par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Exemple

Soit E le \mathbb{R} -e.v des applications continues de l'intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R} .
Alors l'application

$$E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \rightarrow \langle f | g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

est un produit scalaire (exercice).

V. 2. 3. Produit scalaire complexe

Définition

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **forme sesquilinéaire** sur E si :

- pour tout $b \in E$ fixé, l'application $\varphi_b : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$ est linéaire.
- pour tout $a \in E$ fixé, l'application $\varphi_a : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ est **semi-linéaire** :

$$\varphi(a, y_1 + y_2) = \varphi(a, y_1) + \varphi(a, y_2), \text{ pour tout } y_1, y_2 \in E$$

$$\varphi(a, \lambda y) = \bar{\lambda} \varphi(a, y), \text{ pour tout } y \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exemple

En prenant $E = \mathbb{C}$ l'application

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x, y) = x\bar{y}$$

est une forme sesquilinéaire sur E . En effet :

- pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est linéaire.
- pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = a\bar{y}$ est semi-linéaire :

$$\varphi_a(y_1 + y_2) = a(\overline{y_1 + y_2}) = a\bar{y}_1 + a\bar{y}_2 = \varphi_a(y_1) + \varphi_a(y_2)$$

$$\varphi_a(\lambda y) = a\overline{\lambda y} = a\bar{\lambda}\bar{y} = \bar{\lambda}\varphi_a(y).$$

Définition

Une forme sesquilinéaire $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est

- **hermitienne** si $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$, pour tout $x, y \in E$.
- **positive** si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- **définie positive** si elle est positive et si pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Exemple

Dans \mathbb{C}^2 , l'application

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

est une forme sesquilinéaire (exercice) hermitienne et définie positive. En effet :

- φ est hermitienne : on a

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 = \overline{y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2} = \overline{\varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))}$$

et donc φ est hermitienne.

- φ est définie positive : on a

$$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$$

et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Définition

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme sesquilinéaire sur E qui est hermitienne et définie positive.

- Un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien**.
- Un \mathbb{C} -espace vectoriel de **dimension finie** muni d'un produit scalaire est appelé un espace **hermitien**.

Notation

Si $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y \rangle$.

Exemple : Produit scalaire canonique de \mathbb{C}^n

Dans \mathbb{C}^n , le produit scalaire **canonique**, est défini par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}.$$

Récapitulatif pour les \mathbb{R} -espaces vectoriels

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire sur E qui est **symétrique** et **définie positive**.
- Un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien**.
- Un \mathbb{R} -espace vectoriel de **dimension finie** muni d'un produit scalaire est appelé un espace **euclidien**.
- Produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n : le produit scalaire **canonique** de \mathbb{R}^n , est défini par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Récapitulatif pour les \mathbb{C} -espaces vectoriels

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel.

- On appelle **produit scalaire** sur E toute forme **sesquilinéaire** sur E qui est **hermitienne** et **définie positive**.
- Un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien**.
- Un \mathbb{C} -espace vectoriel de **dimension finie** muni d'un produit scalaire est appelé un espace **hermitien**.
- Produit scalaire canonique de \mathbb{C}^n : le produit scalaire **canonique** de \mathbb{C}^n , est défini par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}.$$

V. 2. 4. Quelques propriétés

Rappel

Si $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y \rangle$.

Dans la suite E est un \mathbb{K} -espace vectoriel préhilbertien. Donc un espace vectoriel, réel ou complexe, muni d'un produit scalaire noté $\langle x|y \rangle$.

Définition

Pour tout $x \in E$, $\langle x|x \rangle \geq 0$.

- On pose alors $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$ qu'on appelle la **norme** de x .
- Pour tous $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$ qu'on appelle la **distance** entre x et y .

Exemple

Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x_1, x_2)|(y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

on retombe sur la notion usuelle de distance

$$\begin{aligned}d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \sqrt{\langle (x_1 - y_1, x_2 - y_2)|(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \rangle} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.\end{aligned}$$

Proposition

Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire),
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x|y \rangle) + \|y\|^2$.

Proposition (Identité du parallélogramme)

Dans tout espace préhilbertien E , on a pour tous $x, y \in E$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés).

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Dans tout espace préhilbertien E , on a pour tous $x, y \in E$

$$\| \langle x|y \rangle \| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Soient u et v deux vecteurs non nuls de E . On sait d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\left| \frac{\langle u|v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right| \leq 1$$

On peut donc trouver un unique angle $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u|v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

Définition

Cet unique angle est appelé **l'angle non orienté** entre u et v .

V. 3. Orthogonalité

Définition

- On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont **orthogonaux** si $\langle x|y \rangle = 0$. On écrit $x \perp y$.
- Deux parties A et B de E sont dites **orthogonales** si pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, a et b sont orthogonaux. On écrit $A \perp B$.

Remarque

Remarquons que deux vecteurs u et v non nuls sont orthogonaux si et seulement si l'angle non orienté formé entre u et v est $\pi/2$.

Définition

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien E . On dit que \mathcal{C} est **orthogonale** si $u_i \perp u_j$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}$ avec $i \neq j$.

Théorème de Pythagore

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille **orthogonale** de vecteurs d'un espace préhilbertien E . Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

Proposition

Toute famille de vecteurs, ne contenant pas de vecteurs nuls, orthogonale est libre.

V. 4. Projection orthogonale

Proposition

Soit A une partie non vide de E . L'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A , noté A^\perp

$$A^\perp = \{x \in E \mid x \perp y \text{ pour tout } y \in A\}$$

est un s.e.v de E appelé **l'orthogonal** de A .

Proposition

Pour tout s.e.v F de dimension finie de E on a $E = F \oplus F^\perp$.

Théorème (projection orthogonale)

Soit F un s.e.v de dimension finie de E . Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur y dans F tel que :

$$\|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

C'est l'unique vecteur appartenant à F vérifiant $x - y \in F^\perp$.

Pour $x \in E$, le vecteur y de F fourni par le théorème précédent peut être vu comme la meilleure approximation de x dans F .

On dit que y est la **projection orthogonale** de x sur F . On note $y = p_F(x)$.

On a $E = F \oplus F^\perp$ et

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x))$$

avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

V. 4. Bases orthonormées, orthonormalisation

Définition

On dit d'un vecteur $x \in E$ qu'il est **unitaire** si $\|x\| = 1$.

Définition

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E . On dit que \mathcal{C} est **orthonormée** si \mathcal{C} est orthogonale et si u_i est unitaire pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

Définition

Une base de E qui forme une famille orthonormée est appelée **base orthonormée**.

Autrement dit : une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est une base orthonormée si

- $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ pour tout i, j avec $i \neq j$.

Exemple

Dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

la base canonique $Can = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée. Il faut vérifier (exercice)

- $\|e_i\| = 1$,
- $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ pour tout i, j avec $i \neq j$.

Proposition (Lecture des composantes dans une base orthonormée)

Soit E un espace euclidien ou hermitien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormée** de E . Alors pour tout $x \in E$, on a

$$x = \langle x|e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x|e_n \rangle e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = |\langle x|e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle x|e_n \rangle|^2.$$

Donc

$$x = \begin{pmatrix} \langle x|e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x|e_n \rangle \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Proposition

Soit F un s.e.v. de dimension finie de E . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une **base orthonormée** de F . Alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur F est donnée par

$$p_F(x) = \langle x | e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x | e_p \rangle e_p.$$

Exemple

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, calculons la projection orthogonale de $u = (2, 1, 1)$ sur la droite vectorielle $F = \text{Vect}((1, 1, 0))$.

- base orthonormée de F : $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$ et donc en posant $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ on obtient une base orthonormée de F
- On a

$$p_F(u) = \langle u|v \rangle v = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right).$$

Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors il existe une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de E , **orthonormée** et vérifiant $\text{Vect}(f_1, \dots, f_j) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

On construit les vecteurs f_1, \dots, f_n par récurrence, selon un procédé appelé le **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**, comme suit :

- 1 On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
- 2 Supposons que la famille (f_1, \dots, f_j) est construite, $1 \leq j \leq n - 1$, on définit alors f_{j+1} par

$$f_{j+1} = \frac{e_{j+1} - \sum_{k=1}^j \langle e_{j+1} | f_k \rangle f_k}{\left\| e_{j+1} - \sum_{k=1}^j \langle e_{j+1} | f_k \rangle f_k \right\|}.$$

Remarque

Remarquons que le vecteur

$$\sum_{k=1}^j \langle e_{j+1} | f_k \rangle f_k$$

est la projection orthogonale de e_{j+1} sur l'espace vectoriel engendré par f_1, f_2, \dots, f_j . Par conséquent, le vecteur

$$e_{j+1} - \sum_{k=1}^j \langle e_{j+1} | f_k \rangle f_k$$

est orthogonal à l'espace vectoriel engendré par f_1, f_2, \dots, f_j . Pour le rendre unitaire il suffit de le diviser par sa norme

$$\frac{e_{j+1} - \sum_{k=1}^j \langle e_{j+1} | f_k \rangle f_k}{\left\| e_{j+1} - \sum_{k=1}^j \langle e_{j+1} | f_k \rangle f_k \right\|}.$$

Exemple

Dans \mathbb{R}^3 considérons

$$u_1 = (1, -1, 0); u_2 = (0, 2, 1) \text{ et } F = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

et calculons une base orthonormée de F par le procédé de Gram-Schmidt.

On pose

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

on voit alors $\|v_1\| = 1$ et $\text{Vect}(u_1) = \text{Vect}(v_1)$. On a

$$u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle v_1 = (0, 2, 1) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (1, 1, 1)$$

et on pose donc

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

D'où (v_1, v_2) est une base orthonormée de F .

Corollaire 1 (Existence des bases orthonormées)

Tout espace euclidien ou hermitien admet des bases orthonormées.

Corollaire 2 (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit E un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \geq 1$. Soit (e_1, \dots, e_p) , où $1 \leq p \leq n - 1$, une famille orthonormée de E . Alors il existe e_{p+1}, \dots, e_n de E tel que $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E .