Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2015

Proposition & Définition

Supposons avoir défini le déterminants des matrices carrées $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ avec $m \leq n-1$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Δ_{ij} le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Alors :

- (Développement suivant une colonne) : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

- (Développement suivant une ligne) : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Développement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple

En développant suivant la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3-30+0 = -33.$$

Définition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E. On définit

$$det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = det(M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)).$$

Proposition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E.
- $det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

et donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$. On a alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Quelques propriétés des déterminants

- Un déterminant qui a deux colonnes (resp. deux lignes) identiques est nul.
- La permutation de deux colonnes (resp. de deux lignes) multiplie le déterminant par -1.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes) est nul.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est formée de 0 est nul.
- La valeur d'un déterminant est inchangé si l'on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes).
- Si l'on multiplie une colonne (resp. une ligne) d'un déterminant par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.

V. Systèmes d'équations linéaires

V. I. Introduction

Les systèmes linéaires interviennent dans diverses branches des mathématiques, ainsi que dans la résolution de nombreux problèmes issus des autres domaines, comme la physique, la mécanique, l'économie, le traitement du signal, ...

Ils peuvent être considérés comme la "base calculatoire" de l'algèbre linéaire. Ils sont au coeur du traitement d'une grande partie des problèmes issus de l'algèbre linéaire en dimension finie. Par exemple, ils permettent de déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire, de déterminer si une famille de vecteurs est libre ou non, ...

Exemples de la géométrie euclidienne

- Dans le plan (Oxy), l'équation d'une droite s'écrit

$$ax + by = c,$$

où a, b et c sont des réels.

- Considérons deux droites : $\mathcal{D}_1$ d'équation $ax + by = c$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation $dx + ey = f$. Alors un point (x, y) appartient à l'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, si et seulement si, il est solution du système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Remarquons que trois cas se présentent :

  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent en un seul point : (S) a une unique solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Dans l'espace $(Oxyz)$, l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des solutions du système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array} \right.$$

Trois cas se présentent :

- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite : (S) a une infinité de solutions
- $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
- $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

V. 2. Définitions, propriétés

On appelle système linéaire de n équations et à m inconnues $x_1, \dots, x_m$, tout système de la forme

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{im}x_m & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

où $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ et $b_1, \dots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

- Les nombres a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, sont les coefficients du système (S).
- Le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ est le second membre du système (S).

Exemples

(1) Pour $n = 1$, on obtient une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b.$$

(2) Équation d'une droite dans le plan : $ax + by = c$.

(3) Systèmes à 2 équations et 2 inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 9x + 6y = 3 \end{cases}$$

(4) Le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_1 = 1 \end{cases}$$

a comme second membre $(1, 1, 1)$.

(1) La matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ est appelée la matrice du système (S). Elle sera notée A_S.

(2) Si le second membre du système est nul, autrement dit $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, on dit que le système (S) est homogène.

Exemples

(1) Soit (S) le système

$$(S)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$.
(2) Le système

$$(S)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

est homogène.

V. 3. Écriture matricielle

Soit (S) un système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

$A = A_S = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ sa matrice et $(b_1, \ldots, b_n)$ son second membre. En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on peut écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$A \cdot X = B.$$

Exemple

Soit (S) le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 = 10. \end{array} \right.$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système

$$(S)\quad \begin{cases} 2x + 7y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 6z = 11, \\ x - y + 9z = 0. \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système

$$(S)\quad \begin{cases} 2x + 9y = 1, \\ 3x - 2y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 3, 1)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V. 4. Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soient $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ munis respectivement des bases canoniques.

Soit (S) un système linéaire de n équations et m inconnues de matrice A.

Alors on peut associer canoniquement une application linéaire f à (S) définie sur $\mathbb{K}^m$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$: c'est l'application linéaire associée à A (relativement aux bases canoniques)

$$f(x_1, \ldots, x_m) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

En posant $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, (S) est équivalent à

$$f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

V. 5. Ensemble des solutions

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations et à m inconnues.

- Une solution de (S) est un m-uplet $(s_1, \ldots, s_m)$ tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, $\cdots$, s_n pour x_n, dans (S) on obtient une égalité.
- L'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble de toutes les solutions de (S).
- On dit que (S) est compatible si (S) admet des solutions.

Proposition 1

Soit (S) un système linéaire homogène de n équations à m inconnues. L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

Preuve

En utilisant l'application linéaire f associée à (S), on a

$$(s_1, \ldots, s_m) \text{ est une solution de } (S) \text{ si et seulement si } f(s_1, \ldots, s_m) = \vec{0}$$

$$\text{si et seulement si } (s_1, \ldots, s_m) \in Ker(f).$$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est le noyau de f. Comme ce dernier est un $\mathbb{K}$-e.v., il en est de même de l'ensemble des solutions de (S). $\square$

Proposition 2

Soit (S) un système linéaire de n équations à m inconnues. Si $\vec{s}$ est une solution particulière de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est

$$\vec{s} + Ker(f) = \{\vec{s} + \vec{h} \mid \vec{h} \in Ker(f)\},$$

où f est l'application linéaire associée à (S).

Preuve

Soit $\vec{x}$ une solution de (S). Alors $f(\vec{x}) = \vec{b}$, où $\vec{b}$ est le vecteur représenté par le second membre de (S). On a

$$f(\vec{x} - \vec{s}) = f(\vec{x}) - f(\vec{s}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

et donc $\vec{x} - \vec{s} \in Ker(f)$. D'où $\vec{x} = \vec{s} + (\vec{x} - \vec{s}) \in \vec{s} + Ker(f)$. Inversement, si $\vec{x} = \vec{s} + \vec{h}$, avec $\vec{h} \in Ker(f)$, alors $f(\vec{x}) = f(\vec{s} + \vec{h}) = \vec{b} + f(\vec{h}) = \vec{b}$ et donc $\vec{x}$ est solution de (S). □

Proposition 3

Tout système d'équations linéaires possède ou bien aucune solution, ou bien une seule solution, ou bien une infinité de solutions.

Preuve

Soit $f(\vec{x}) = \vec{b}$ l'interprétation à l'aide d'une application linéaire de (S). Un des cas suivants se présentent :

- $\vec{b} \notin Im(f)$: (S) n'a pas de solutions
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) = \{\vec{0}\}$: (S) a une unique solution
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) \neq \{\vec{0}\}$: (S) a une infinité de solutions

$\square$

V. 6. Existence des solutions

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{K}^m$) engendré par ses vecteurs colonnes.

Propriété

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est égal au rang de l'application linéaire qui lui est associée. En effet, si f est l'application linéaire associée à A

$$rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim(Vect(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_m)))$$

or on vérifie que

$$f(\vec{e}_i) = A \cdot \vec{e}_i = \text{ la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Définition

- Soit A une matrice de type (m, n). On appelle matrice extraite de A, toute matrice obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes de A.
- On appelle déterminant extrait de A, tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème (Calcul pratique du rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire de A au moins une matrice carrée inversible de type (r, r). $\square$

Exemples

(1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est $det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$.

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est $det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Donc on ne peut pas extraire une matrice d'ordre 3 inversible. Par contre la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ extraite de A possède un déterminant non nul ; d'où $rg(A) = 2$.

Définition

Soit (S) un système de n équations à m inconnues de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ et de second membre $\vec{b}$.

- Le rang de (S) est par définition le rang de sa matrice :

$$rg(S) = rg(A).$$

- La matrice augmentée de (S) est la matrice, notée $[A|\vec{b}]$, définie par :

$$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour bien distinguer le second membre $\vec{b}$ de A et pour des raisons pratiques de calculs, on écrit $[A|\vec{b}]$ sous la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Exemple

Considérons le système

$$(S)\quad \begin{cases} 2x+7y+5z=1, \\ 3x+2y-6z=11, \\ x-y+9z=0. \end{cases}$$

Alors la matrice du système (S) est

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1,11,0)$. Donc $[A|\vec{b}]$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 11 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Proposition (CNS pour l'existence des solutions)

Soit (S) un système d'équations linéaires, de matrice A et de second membre $\vec{b}$. Alors (S) est compatible, si et seulement si, $rg(A) = rg([A|\vec{b}])$.

Exemple

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y + 3z = 0 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Alors la matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est $det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$. La matrice augmentée de (S) est $[A|\vec{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Son rang ne peut être 4 et comme A est une matrice extraite de rang 3 ; $\mathrm{rg}([A|\vec{b}]) = 3$. Donc (S) est compatible (admet des solutions).

V. 7. Méthodes de résolution

V. 7. 1. Systèmes de Cramer

Définition

On dit qu'un système de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si la matrice A de ce système est inversible.

Proposition

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Quel que soit B, le système (S) admet une solution et une seule.
- Quel que soit B, le système (S) admet au moins une solution.
- Quel que soit B, le système (S) admet au plus une solution.
- Le système homogène associé au système (S) n'admet que la solution triviale.
- La matrice A du système (S) est inversible.
- $det(A) \neq 0$.

La solution unique du système (S) est alors $X = A^{-1}B$.

Proposition (Règle de Cramer)

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit A_i la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le second membre B.

Supposons que (S) est de Cramer (donc $det(A) \neq 0$). Alors l'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ de (S) est donnée par

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \ \ 1 \leq i \leq n.$$

Exemple

Soit

$$(S)\ \begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$$

écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Donc (S) est un système de Cramer et l'unique solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9}{1} = 9,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{1} = -4.$$

V. 7. 2. Méthode du pivot de Gauss

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est échelonnée si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Autrement dit : le nombre de coefficients nuls commençant la ligne L_{i+1} est strictement plus grand que le nombre de coefficients nuls commençant la ligne L_i.

Exemple

Les matrices suivantes sont échelonnées

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Définition

Un système (S) est dit échelonné si sa matrice est échelonnée.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est échelonnée réduite si elle est échelonnée et si le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple

Les matrices suivantes sont échelonnées et réduites

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices suivantes sont échelonnées mais pas réduites

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition

Un système (S) est dit échelonné réduit si sa matrice est échelonnée et réduite.

La méthode de pivot de Gauss consiste à transformer un système, en utilisant des "opérations élémentaires", à un système échelonné réduit. Il se trouve que les systèmes échelonnés réduits sont plus faciles à résoudre.

Exemple

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

qui est échelonné et réduit ; car sa matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est échelonnée et réduite. Alors l'ensemble des solutions est

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1 - 2\lambda, x_2 = \lambda, x_3 = 4, x_4 = 3;\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Définition

Les opérations suivantes sur les équations d'un système linéaire (ou sur les lignes de sa matrice) sont appelées des opérations élémentaires :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$: multiplier l'équation L_i par le scalaire non nul λ.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$: rajouter à l'équation L_i, l'équation L_j multipliée par le scalaire λ.
- $L_i \leftrightarrow L_j$: permuter les deux équations L_i et L_j.

Propriété

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système. Ils transforment un système linéaire à un autre système ayant le même ensemble de solutions.

Étape 1 : échelonnement

- Il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Si ce n'est pas le cas, on permute la ligne L_1 par la première ligne dont le premier coefficient est non nul : $L_1 \leftrightarrow L_j$.
- Si le premier coefficient de la première ligne est différent de 1, on multiplie L_1 par $1/a_{11}$: $L_1 \leftarrow 1/a_{11}L_1$. Nous avons un pivot en position $(1, 1)$.
- Le pivot sert à éliminer tous les autres termes sur la même colonne : pour $2 \leq i \leq n$, on remplace l'équation L_i par $L_i - a_{i1}L_1$, on élimine ainsi x_1 dans l'équation L_i.

On obtient un système avec une équation L_1 contenant x_1 et les autres équations ne contenant pas de x_1 :

$$(S')\quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1m}x_m & = & b'_1 \\ 0 & + & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & + & a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{array} \right.$$

On abouti ainsi à un nouveau système, on recommence les étapes ci-dessus pour éliminer x_2 :

$$(H)\quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{array} \right.$$

Exemple

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires directement sur la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2 L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{9} L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Étape 2 : réduction

En partant de la dernière ligne et en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot, on applique la même méthode que celle de l'étape d'échelonnement, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Étape 3 : resolution

Maintenant le système est échelonné et réduit, sa résolution est plus simple.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée réduite obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

Le système devient

$$\left\{\begin{array}{c} x = -5/9 \\ y = 8/9 \\ z = 11/9 \end{array}\right.$$

et la solution, dans ce cas, est évidente.

Exemple 2

Considérons le système

$$(S)\quad \left\{ \begin{array}{c} -y+2z+13t=5 \\ x-2y+3z+17t=4 \\ -x+3y-3z-20t=-1 \end{array} \right.$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array} \right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Exemple 2

Pour réaliser la réduction, on remonte à partir de la dernière ligne en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Exemple 2

Le système (S) est maintenant équivalent à

$$\begin{cases} x - 4t = -2 \\ y - 3t = 3 \\ z + 5t = 4 \end{cases}$$

où x, y, z sont les variables principales et t est la variable secondaire (ou paramètre). L'ensemble des solutions est

$$\Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2 + 4\lambda, y = 3 + 3\lambda, z = 4 - 5\lambda, t = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$$

$$= (-2, 3, 4, 0) + Vect\Big((4, 3, -5, 1)\Big).$$

V. 8. Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Si A est une matrice carrée inversible de type (n, n) et B est l'inverse de A, alors

$$AB = I_n$$

Si $B_1, \ldots, B_n$ sont les colonnes de B , l'équation matricielle précédente est équivalente aux n équations

$$AB_i = \vec{e_i}, i = 1, ..., n.$$

Donc calculer B revient à résoudre n systèmes d'équations linéaires ayant la même matrice A.
Pour calculer la matrice inverse, on applique la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes précédents parallèlement.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit alors le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on applique la méthode de Gauss.

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Exemple

Donc la matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$