Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2016

II. Applications linéaires

II. 1. Définitions, propriétés

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application. On dit que f est linéaire si

- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.
- Pour tout $\vec{u} \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application. Alors f est linéaire ssi

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$;
- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Exemple 1

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f : E \to E$ l'homothétie de rapport α

$$\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \alpha \vec{u}.$$

Alors f est linéaire. En effet :

- $f(\vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \alpha(\lambda \vec{u} + \vec{v})$$

$$= \lambda \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$$

$$= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

Exemple 2

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^{∞}.
L'application

$$D : E \to E, \; D(f) = f'$$

est une application linéaire. En effet :

- $D(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} D(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' \\ &= \lambda f' + g' \\ &= \lambda D(f) + D(g). \end{aligned}$$

Exemple 3

Une rotation R d'un angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire.

En effet, on a

$$\text{pour } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\; R(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos\theta\; x - \sin\theta\; y \\ \sin\theta\; x + \cos\theta\; y \end{pmatrix}$$

et donc

$$R(\vec{u}+\vec{v}) = R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\theta\; (x+x') - \sin\theta\; (y+y') \\ \sin\theta\; (x+x') + \cos\theta\; (y+y') \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\; x - \sin\theta\; y \\ \sin\theta\; x + \cos\theta\; y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta\; x' - \sin\theta\; y' \\ \sin\theta\; x' + \cos\theta\; y' \end{pmatrix} = R(\vec{u}) + R(\vec{v}).$$

De même on a $R(\lambda\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

Exercice

Montrer que toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des homothéties.

Proposition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E, F)$, muni des opérations

$$(f, g) \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x); \;\; (\lambda, f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est un $\mathbb{K}$-e.v. $\square$

II. 2. Image et noyau

Définition 2

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle :

- Image de f, le s.e.v de F :

$$Im(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

- Noyau de f, le s.e.v de E :

$$Ker(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Exercice

Montrer que $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont effectivement des sous-espaces vectoriels.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire. En effet, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(x + x', y + y') = \Big((x + x') - (y + y'), (x + x') + (y + y')\Big)$$

$$(x - y, x + y) + (x' - y', x' + y') = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

et (on vérifie bien) $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Montrons que $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ et $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$ et $x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in Im(f) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x - y = a$ et $x + y = b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{b-a}{2}$.

Proposition 2

Soit $f \in (E, F)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective ;
- $Ker(f) = \{\vec{0}\}$;
- Pour tout $\vec{u} \in E$, $f(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est surjective ;
- Im(f)=F.

Définition 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La dimension de Im(f) est appelée le rang de f et est notée $rg(f)$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim(E) = rg(f) + dim(Kerf(f)).$$

Définition 4 (Un peu de terminologie)

- Une application linéaire de E dans E est appelé un endomporphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.

III. Matrices

III. 1. Définitions, propriétés

On appelle matrice à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$).
On note

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m},$$

a_{ij} est le coefficient : intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}\ ;\ B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 25 & 1+i \\ 21 & 11 \end{pmatrix}\ ;\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (mais dans $\mathbb{C}$ aussi) ; B est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que M est une matrice

- colonne si elle a une seule colonne ($m = 1$).
- ligne si elle a une seule ligne ($n = 1$).
- carrée si elle a le même nombre de lignes que de colonnes ($n = m$).

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} i & 3 & 5 \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée
B est une matrice ligne
C est une matrice colonne

Remarques & notations

- Une matrice à n lignes et m colonnes est aussi appelée matrcie de type (n, m) ou encore matrice $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.

Remarques & notations

- La matrice identité $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice carrée dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients valent 0.
  Exemple :
$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- La matrice nulle $O_{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.
  Exemple :
$$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III. 2. Opérations sur les matrices

Définition 2

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

On définit la somme $A + B$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Remarque

On ne somme que des matrices de même type.

Définition 3

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On définit la matrice λA, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} ;\ \pi B = \begin{pmatrix} 5\pi & 6\pi \\ 7\pi & 8\pi \end{pmatrix}$$

Proposition 1

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices $(A, B) \mapsto A + B$ et de la multiplication par des scalaires $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \times m$.
Le vecteur nul de cet espace est la matrice nulle $O_{n,m}$.

Exemple & exercice

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on considère la famille $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition 4 (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ une matrice $p \times m$.

Le produit de A et B est la matrice $n \times m$, notée $A \cdot B$, dont les coefficients c_{ij} sont définis par : c_{ij} est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = (32).$$

Exemple

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times 0+2\times 1 & 1\times 2+2\times 2 \\ 3\times 0+4\times 1 & 3\times 2+4\times 2 \\ 5\times 0+6\times 1 & 5\times 2+6\times 2 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \\ 6 & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarques

(1) Pour que le produit de A par B ait un sens if faut que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B.
(2) Le produit d'une matrice de type (n, p) par une matrice de type (p, m) est une matrice de type (n, m).

Remarques

(1) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve qu'en général $A \cdot B \neq B \cdot A$ et $A \cdot B = O$ n'implique pas forcément $A = O$ ou $B = O$ (O désigne la matrice nulle).

(2) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a (exercice)

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Propoiétés

Les propriétés suivantes sont vraies sous hypothèse que les produits considérés ont un sens :

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

Notations & conventions

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}.$$

III. 3. Matrice de passage

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $\vec{u} \in E$ ayant comme composantes dans la base $\mathcal{B}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
(Donc $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$).
On appelle matrice des composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On écrit

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Définition 5 (suite)

Plus généralement, soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle matrice des composantes de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice $n \times m$ dont les colonnes sont $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1), \dots, M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_m)$.
Elle est notée $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$.

Exemple

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, la matrice carrée $n \times n$, $M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$.

Donc c'est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de $\vec{f}_j$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

C'est donc la matrice carrée $n \times n$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\vec{f}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n.$$

Elle est notée $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons la matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Les composantes de $\vec{w}$ et $\vec{r}$ dans $\mathcal{B}_1$ sont (exercice)

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v},\ \vec{r} = -\vec{u} + \vec{v}.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}(\vec{u}).$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}),\ \mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On avait trouvé

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{f} = \vec{w} + \vec{r}$ et calculons ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1$. On a

$$M_{\mathcal{B}_2}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

III. 4. Matrice d'une application linéaire

Définition 7

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

On appelle matrice de f, par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)).$$

Elle est notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exemple

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $\mathbb{R}^2$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y).$$

On a

$$f(\vec{u}_1) = (1, 1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \; f(\vec{u}_2) = (2, -1) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$

$$f(\vec{u}_3) = (-1, 0) = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 3

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v (de dimension finie) munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u})) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}(\vec{u}).$$

Remarque

Autrement dit, si Y désigne la matrice colonne des composantes de $f(\vec{u})$ dans la base $\mathcal{C}$ et X désigne la matrice colonne des composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$Y = AX, \quad \text{où } A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, par rapport aux bases canoniques,

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, x-y),\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Définition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension respectives n et m. Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ une base de F.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. L'application linéaire associée à A, relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, est l'application définie par : au vecteur $\vec{u} \in E$ de composantes $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, elle associé le vecteur $\vec{v}$ dont les composantes $(y_1, \cdots, y_m)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont données par

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire associée à A, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit E (respectivement F) un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n (respectivement m), muni d'une base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{C}$). L'application

$$\mathcal{M} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K});\ f \mapsto \mathcal{M}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.

Remarque

Donc fondamentalement en dimension finie, une fois que les bases sont fixées, il n'existe pas de différence réelle entre applications linéaires et matrices.

Proposition 4

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

III. 5. Matrices inversibles

Définition 8

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.
Cette matrice est alors unique, est appelée l'inverse de A et est notée A^{-1}.

Exemple

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Proposition 5

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A et B sont inversibles, il en de même de $A \cdot B$ et on a

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Proposition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une base de F. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si et seulement si $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ est inversible.
On a alors

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f^{-1}).$$

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est inversible.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(x, y) = (a, b) \text{ si et seulement si } x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{b-a}{2}$$

et donc $f^{-1}(a, b) = (\frac{a+b}{2},\ \frac{b-a}{2})$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 8

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$; autrement dit

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}.$$

Proposition 9

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Alors

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

IV. Déterminants

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est la quantité

$$ad - bc.$$

On note

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - 1 \times 5 = 11.$$

Proposition & Définition

Supposons avoir défini le déterminants des matrices carrées $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ avec $m \leq n-1$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Δ_{ij} le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Alors :

- (Développement suivant une colonne) : pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

- (Développement suivant une ligne) : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Développement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple

En développant suivant la première colonne

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}\right| = 1\cdot\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{array}\right| - 3\cdot\left|\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{array}\right| + 0\cdot\left|\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = -3-30+0 = -33.$$