IV. Séries trigonométriques, séries de Fourier

Bessel-Parseval

Théorème 1 (Bessel-Parseval)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, où $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, continue par morceau. Alors (Inégalité de Bessel)

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2\, dx,$$

En plus, les séries $\sum_{n\geq 0} |c_n|^2$, $\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$ sont convergentes et on a (Égalité de Parseval)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2\, dx,$$

où a_n, b_n sont les coefficients de la série de Fourier associée à f et c_n est le coefficient en écriture complexe.

Bessel-Parseval

Remarque

Donc si f est 2π-périodique, (et continue par morceau), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\, dx.$$

Exemple 1 (suite)

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 2π, définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $0 < \alpha < \pi$. On a $a_0 = \dfrac{2\alpha}{\pi}$, $a_n = \dfrac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}$. En appliquant la formule de Parseval on obtient :

$$\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{4\sin^2(n\alpha)}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{\alpha}{\pi},$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) = \frac{\alpha\pi - \alpha^2}{2}.$$

Bessel-Parseval

Exemple 2 (suite)

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

On a $a_0 = \pi, \quad a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

En appliquant l'égalité de Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Interprétation géométrique et vectorielle

On peut réinterpréter la théorie des séries de Fourier en utilisant les notions d'espace vectoriel et de produit scalaire.

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues par morceau. Alors E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, muni des opérations usuelles

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

On définit

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Alors l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais pas forcément définie positive. Cependant, elle conserve beaucoup de propriétés d'un produit scalaire.

Interprétation géométrique et vectorielle

Si

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = 0,$$

alors f est nulle sauf en un nombre fini de points. Pour pouvoir parler d'un produit scalaire, on identifié f et g si elles sont identiques sauf en un nombre fini de points sur $[0, 2\pi]$.

Ainsi sur ce nouveau espace, l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle$ devient un produit scalaire.

On peut aussi se restreindre à l'espace des applications continues où $\langle f|g\rangle$ est un produit scalaire.

Définition 1

On appelle semi-norme de la convergence en moyenne quadratique d'une fonction $f \in E$, le nombre réel

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, considérons l'application

$$e_n : x \mapsto e_n(x) = e^{inx}.$$

Alors $e_n \in E$.

Interprétation géométrique et vectorielle

Propriété 1

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans E.

Propriété 2

Soit $f \in E$. Le coefficient de Fourier c_n (de l'écriture complexe) de f vérifie

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx,$$

Remarquons que $c_n e_n$ est la projection orthogonale de f sur e_n.

Propriété 3

Soit $f \in E$. Les coefficients de Fourier a_n, b_n de f vérifient

$$a_n = 2\left\langle \cos(nx) | f \right\rangle, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } b_n = 2\left\langle \sin(nx) | f \right\rangle, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Notions sur les équations aux dérivées partielles

Pour étudier les phénomènes réels, on utilise les lois de la physique : mécanique, électromagnétisme, acoustiques, thermodynamiques, quantiques, relativistes, etc.

Cette étude se traduit généralement par une modélisation mathématique par des équations différentielles ordinaires ou par des *équations aux dérivées partielles*.

Définition 1

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{h},$$

existe et finie, on l'appelle la i-ème dérivée partielle de f au point $(a_1, \cdots, a_n) \in D$ et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$.

Si pour tout $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, f admet une i-ème dérivée partielle au point $\bar{a}$, l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \bar{a} \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$ est appelée la i-ème dérivée partielle de f (ou souvent la dérivée partielle par rapport à la variable x_i).

Quelques rappels

Exemple 1

Considérons la fonction $f(x,y) = xy$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)b - ab}{h} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{b+h-ab}{h} = a.$$

Remarque

Dans la pratique, pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable x_i, on fixe les autres variables et on calcule la dérivée au sens usuel où la variable est x_i. Dans l'exemple précédent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (xy)' \text{ (où } y \text{ est considérée comme une constante)} = y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (xy)' \text{ (où } x \text{ est considérée comme une constante)} = x.$$

Quelques rappels

Définition 2

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si toutes les dérivées partielles de f existent en un point $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, alors on appelle gradient de f au point $\bar{a}$ le vecteur

$$\nabla f(a_1, \cdots, a_n) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \cdots, a_n) \Big)$$

Exemple 1 (suite)

On a

$$\nabla f(a, b) = (b, a).$$

Définition 3

La dérivée partielle de f d'ordre j par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}$ est définie par

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\Big(\frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}}\Big).$$

Exemple 2

Considérons la fonction $f(x,y) = x^4 + y^3$. Alors, les dérivées d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = 12x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

Quelques rappels

Définition 4

Le Laplacian d'une fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est

$$\Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}).$$

Une équation aux dérivée partielles (EDP en abrégé) est une relation entre une fonction de plusieurs variables $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et ses dérivées partielles :

$$(E) \qquad F\Big(\bar{x}, u, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}\Big) = 0$$

où m est le degré de l'équation.

Le problème est posé sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On cherche des applications $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E) et satisfaisant des conditions initiales et des conditions sur le bord ∂D.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est

$$(E) \qquad \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \delta\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta u = f,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \zeta$ sont des constantes et $f : D \to \mathbb{R}$ est une application appelée le second membre de l'équation.

On dit que l'equation (E) est :

- *elliptique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$,
- *parabolique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$,
- *hyperbolique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

Exemples

- L'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est hyperbolique.
- L'équation de Laplace (ou Poisson) $\Delta u = 0$ ou $\Delta u = f$ est elliptique.
- L'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est parabolique ($c > 0$).

Équation des ondes

La propagation d'une onde sur une corde infinie est modélisée par l'équation des ondes sur $\mathbb{R}$

$$(EO1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale.

Équation des ondes : formule de D'Alembert

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

La solution de l'équation des ondes $(EO1)$ où on suppose que u_1 est une fonction différentiable est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\, dy.$$

Équation des ondes : conditions aux limites

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde sur une demi-corde (infinie). Elle est modélisée par l'équation des ondes avec une condition de frontière :

$$(EO2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, & \forall t > 0, \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale. Physiquement, la condition de frontière s'interprète comme une paroi réfléchissante.

Équation des ondes : conditions aux limites et formule de D'Alembert

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

La solution de l'équation des ondes $(EO2)$ où on suppose que u_1 est une fonction différentiable est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(ct-x)\Big) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} u_1(y)\,dy.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

On cherche les solutions à variables séparées de l'équation des ondes. On suppose qu'il existe des fonctions F et G telles que

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

et en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$FG'' = c^2 F'' G.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

En supposant en plus que $F(x) \neq 0$ et $G(t) \neq 0$, on obtient

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)}.$$

Comme la fonction de gauche dépend uniquement de x et celle de droite uniquement de t, il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda, \quad \frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda.$$

Donc on obtient les équations différentielles linéaires ordinaires suivantes :

$$c^2 F''(x) - \lambda F(x) = 0,$$

$$G''(t) - \lambda G(t) = 0.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

On distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors
$$F(x) = ax + b,\ \ G(t) = \alpha t + \beta.$$
- si $\lambda > 0$, alors
$$F(x) = ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x},\ \ G(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t}.$$
- si $\lambda < 0$, alors
$$F(x) = a\cos(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x) + b\sin(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x),$$
$$G(t) = a\cos(\sqrt{-\lambda}t) + b\sin(\sqrt{-\lambda}t).$$

En tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation des ondes : séries de Fourier

On cherche les solutions L-périodiques de l'équations des ondes :

$$(EO3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x,t) = u(x+L,t), & \end{cases}$$

où on suppose que les fonctions u_0 et u_1 sont périodiques et admettent un développement en séries de Fourier ($\omega = \frac{2\pi}{L}$)

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_{0,n} \cos(n\omega x) + b_{0,n} \sin(n\omega x))$$

$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_{1,n} \cos(n\omega x) + b_{1,n} \sin(n\omega x))$$

Équation des ondes : séries de Fourier

Supposons que la solution $u(x,t)$ est développable en séries de Fourier

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

En dérivant terme à terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n''(t)\cos(n\omega x) + b_n''(t)\sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Big(\sum_{n\geq 1} -(n\omega)^2(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x))\Big).$$

Par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = a_{0,0}, \;\; a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = a_{0,n}, \;\; a_n'(0) = a_{1,n},$$
$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = b_{0,n}, \;\; b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.

Équation des ondes : séries de Fourier

En résolvant les équations différentielles ordinaires précédentes, on obtient

$$a_0(t) = a_{1,0}t + a_{0,0},$$

$$a_n(t) = a_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t),$$

$$b_n(t) = b_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t),$$

et donc la solution $u(x, t)$.

Équation des ondes : séries de Fourier

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes, avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0,1[, \\ 2-x & si \quad x \in [1,2[, \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$.

Équation de Laplace, Équation de Poisson

On considère l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = \rho.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

On cherche des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

à variables séparées. On suppose donc qu'il existe deux fonctions $F(x)$ et $G(y)$ telles que

$$u(x,y) = F(x)G(y).$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

et il existe donc une constante λ telle que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

Comme dans le cas des équations des ondes, on distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b, \;\; G(y) = \alpha y + \beta.$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \;\; G(y) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta \sin(-\sqrt{\lambda}y).$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$G(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation de la chaleur avec une condition initiale

$$(EC1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et l'équation de la chaleur avec une condition au bord

$$(EC2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(0,t) = u_0(t), \quad \forall t > 0, \end{cases}$$

Équation de la chaleur

Grâce aux séries de Fourier ...

Théorème 3

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors il existe une unique solution u de $(EC1)$ vérifiant

- pour tout $t > 0$, $u(x,t)$ est 2π-périodique comme fonction en x,
- la dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$,
- $\lim_{t\to 0^+} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t) - u_0(x)| = 0$.

Équation de la chaleur

Théorème 4

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors il existe une unique solution u de $(EC2)$ vérifiant

- pour tout $x > 0$, $u(x,t)$ est 2π-périodique comme fonction en t,
- la dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$,
- $\lim_{x\to 0^+} \sup_{t>0} |u(x,t) - u_0(x)| = 0$.

Équation des ondes : séries de Fourier

Rappel : équations différentielles ordinaires

On considère l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants avec second membre

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = f$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application. On lui associé l'équation homogène (sans second membre)

$$(EH) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (EH) est un espace vectoriel de dimension 2.

Rappel : équations différentielles ordinaires

Pour résoudre l'équation (E), on calcule une solution particulière y_0 de (E) et on résout l'équation homogène associée (EH).

Si y_{EH} est la solution générale de (EH) alors la solution générale de (E) est

$$y_E = y_{EH} + y_0.$$

Rappel : équations différentielles ordinaires

Pour résoudre l'équation homogène (EH) on associé l'équation caractéristique

$$(EC) \qquad ar^2 + br + c = 0.$$

Rappel : équations différentielles ordinaires

• Si $\Delta > 0$ alors (EC) admet deux solutions réelles r_1, r_2. Dans ce cas les fonctions

$$e^{r_1 x},\ e^{r_2 x}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

• Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet une racine réelle double r. Dans ce cas les fonctions

$$xe^{rx}, \; e^{rx}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{rx} x + C_2 e^{rx}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Rappel : équations différentielles ordinaires

• Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Dans ce cas les fonctions

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Équation des ondes : séries de Fourier

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes

$$(EO) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x,t) = u(x+2,t), & \end{cases}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0,1[, \\ 2-x & si \quad x \in [1,2], \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$.

On cherche d'abord les développements en série de Fourier des fonctions u_0 et u_1. Comme u_1 est identiquement nulle son développement en série de Fourier est nul.

On calcule donc le développement en série de Fourier de u_0 (en toute rigueur celui de la fonction $\bar{u}_0$ paire définie sur $\mathbb{R}$, 2-périodique et qui coïncide avec u_0 sur $[0, 2]$).

La fonction étant paire on a $b_n = 0$ et donc on calcule a_n. On a $(T = 2 = \frac{2\pi}{\omega})$

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u_0(x)\, dx = \int_0^2 u_0(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx$$
$$= 1.$$

Pour $n \geq 1$

$$a_n = \int_0^2 u_0(x)\cos(n\pi x)\ dx = \int_0^1 x\cos(n\pi x)\ dx + \int_1^2 (2-x)\cos(n\pi x)\ dx$$

Par une IPP

$$\int_0^1 x\cos(n\pi x)\ dx = \Big[\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\ dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\Big[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

Avec le changement de variable $t = 2 - x$

$$\int_1^2 (2-x)\cos(n\pi x)\ dx = \int_0^1 x\cos(n\pi x)\ dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

D'où

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}.$$

La série de Fourier de u_0 est

$$\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

Comme $\bar{u}_0$ est continue et dérivable par morceau, on a d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in [0, 2]$

$$u_0(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$$

et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné.

Soit $u(x,t)$ une solution de (EO) 2-périodique développable en série de Fourier

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

En dérivant terme à terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n''(t)\cos(n\omega x) + b_n''(t)\sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n\geq 1}(-(n\omega)^2 a_n(t)\cos(n\omega x) - (n\omega)^2 b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

En reprenant les notations du cours précédent, par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = a_{0,0}, \;\; a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = a_{0,n}, \;\; a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = b_{0,n}, \;\; b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.

Comme $\omega = \pi$ et avec ce qui précède, on obtient

(1) $$a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = 1, \;\; a_0'(0) = 0$$

(2) $$a_n''(t) + (cn\pi)^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \;\; a_n'(0) = 0$$

(3) $$b_n''(t) + (cn\pi)^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = 0, \;\; b_n'(0) = 0$$

La résolution de l'équation (1) donne

$$a_0(t) = 1.$$

L'équation (2) est une équation linéaire homogène du second ordre et son équation caractéristique est $r^2 + (cn\pi)^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm icn\pi$. La solution générale est donc

$$a_n(t) = C_1 \cos(cn\pi t) + C_2 \sin(cn\pi t).$$

Les conditions initiales donnent

$$a_n(0) = C_1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2},\ a_n'(0) = C_2 cn\pi = 0.$$

D'où

$$a_n(t) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(cn\pi t).$$

La résolution de (3) donne immédiatement $b_n(t) = 0$.

D'où finalement la solution recherchée est

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \right) \cos(cn\pi t) \cos(n\pi x).$$