

Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

Mathématiques 3, 2016

IV. Séries trigonométriques, séries de Fourier

IV. 1. Introduction

Joseph Fourier avait introduit l'équation de la chaleur et avait étudié les solutions de cette équation qu'on peut obtenir comme sommes de séries trigonométriques qui depuis portent son nom : séries de Fourier.

Les séries de Fourier constitue un outil important dans l'étude des fonctions périodiques et dans le traitement du signal.

Considérons une barre homogène de longueur finie L . On s'intéresse à déterminer la température $u(x, t)$ de la barre au point x et à l'instant t .

On considère des conditions initiales, on suppose que la température est nulle aux extrémités et qu'à l'instant $t = 0$ elle est donnée par une fonction $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

L'équation qui régit la température $u(x, t)$ en chaque point x à un instant $t > 0$ est **l'équation de la chaleur à une dimension**

$$(E) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

où D est le coefficient de diffusion.

En cherchant des solutions particulières de la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$, on aboutit après calcul aux solutions de (E) de la forme

$$u_n(x, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(\frac{-\pi^2 n^2}{L^2}Dt\right)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{R}$.

Ces solutions ne satisfont pas forcément les conditions initiales.

Comme l'équation E est linéaire, on constate que la somme des fonctions de la forme précédente reste encore une solution de E . En passant aux sommes d'un **nombre infini**, donc aux **séries**, on est amené à chercher des solutions de la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(\frac{-\pi^2 n^2}{L^2}Dt\right),$$

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Les **séries de Fourier** sont des séries de fonctions, qui servent à décomposer les **fonctions périodiques** comme une "combinaison linéaire" de fonctions périodiques plus simples, de la forme $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$.

Donc comme la somme d'une série de la forme

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

IV. 2. Séries trigonométriques

Définition 1

On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ et (a_n) et (b_n) sont des suites réelles ou complexes.

On dit que la série est **réelle** si (a_n) et (b_n) sont des suites réelles.

Rappel

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **T-périodique** si pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x + T) = f(x)$.

Le plus petit T vérifiant la propriété précédente (s'il existe) est appelé **la période** de f .

Exemple

La fonction $x \mapsto \cos(n\omega x)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

On a

$$\cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \cos(n\omega x + 2k\pi) = \cos(n\omega x).$$

Supposons que la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

converge simplement sur \mathbb{R} vers f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Comme les fonctions \sin et \cos sont 2π -périodiques, on déduit que la somme f est périodique. En effet, on a

$$\cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \cos(n\omega x), \quad \sin(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \sin(n\omega x)$$

et donc $f(x + \frac{2k\pi}{\omega}) = f(x)$. Donc f est de période $T = 2\pi/\omega$.

Proposition 1

Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont **absolument convergentes** alors la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

est **normalement convergente** sur \mathbb{R} .

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Proposition 2

Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Considérons la série trigonométrique réelle

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

En utilisant les formules d'Euler

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

la série (1) s'écrit :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \right)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(e^{in\omega x} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-in\omega x} \frac{a_n + ib_n}{2} \right).$$

Posons

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Alors la série (1) devient

$$\begin{aligned} & c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega x} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}. \end{aligned}$$

La dernière expression est appelée la **forme complexe** de la série trigonométrique (1).

Considérons la série trigonométrique réelle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction f

$$(1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

On souhaite calculer les coefficients a_n et b_n en fonction de f comme dans le cas des fonctions développables en séries entières.

Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé. En multipliant les deux côtés de l'égalité (1) par $\cos(p\omega x)$ on a

$$f(x) \cos(p\omega x) = \frac{a_0}{2} \cos(p\omega x) + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\omega x) \cos(p\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \cos(p\omega x)$$

On multiplie aussi les deux côtés de l'égalité (1) par $\sin(p\omega x)$

$$f(x) \sin(p\omega x) = \frac{a_0}{2} \sin(p\omega x) + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\omega x) \sin(p\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \sin(p\omega x)$$

Comme la série converge uniformément, on peut intégrer terme par terme

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(p\omega x) dx =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{a_0}{2} \cos(p\omega x) dx$$

$$+ \sum_{n \geq 1} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x) \cos(p\omega x) dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x) \cos(p\omega x) dx.$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(p\omega x) dx =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{a_0}{2} \sin(p\omega x) dx$$

$$+ \sum_{n \geq 1} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x) \sin(p\omega x) dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x) \sin(p\omega x) dx.$$

Il reste donc à calculer

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x) \cos(p\omega x) dx, \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x) \sin(p\omega x) dx.$$

Exercice

Montrer que

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x) \cos(p\omega x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } p = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x) \sin(p\omega x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } p = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x) \sin(p\omega x) dx = 0.$$

Après substitution, on obtient donc

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

Calcul des coefficients a_n, b_n : conclusion

Considérons la série trigonométrique réelle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

En écriture complexe

On obtient

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) e^{in\omega x} dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

IV. 3. Séries de Fourier

Définition 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique où on pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$, intégrable sur tout intervalle fermé et borné. On appelle **série de Fourier** associée à f , la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

On peut écrire les coefficients en fonction de la période T

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx.$$

On peut se demander :

- La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
- En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

Notation

Si la série de Fourier associée à f converge simplement on note sa somme Sf .

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Définition 3

Une fonction f admet **une discontinuité de première espèce** en un point x_0 si les limites à droite et à gauche en x_0 existent et finies.

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique satisfaisant aux conditions suivantes, appelées conditions de Dirichlet :

- Les discontinuités de f (si elle existent) sont de première espèce et sont en un nombre fini dans tout intervalle fermé et borné $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$Sf(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \right).$$

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est $f(x)$.

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné où la fonction f est continue.

Propriété

Soit $f = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique ($T > 0$). Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx.$$

Preuve

On a

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

Or en utilisant le changement de variable $t = x - T$, on a

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t + T) dt = \int_0^a f(x) dx, \text{ d'où le résultat.}$$

Donc pour le calcul des coefficients de Fourier,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) dx,$$

et pour les fonctions 2π -périodiques, en prenant $a = -\pi$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Rappel

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- f est paire si et seulement si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- f est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est paire alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

- Si f est impaire alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Conséquence

- Si f est paire alors

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Si f est impaire alors

$$a_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx.$$

Exemple 1

Soit $0 < \alpha < \pi$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de période 2π définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f .

Vérifions que f est paire. Si $|x| \leq \alpha$, alors $f(-x) = f(x) = 1$ et si $|x| > \alpha$, alors $f(-x) = f(x) = 0$.

Comme f est paire, $b_n = 0$ et donc on calcule a_0 et a_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} 1 dx \right) = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} \cos(nx) dx \right) = \frac{2 \sin(n\alpha)}{\pi n}.
 \end{aligned}$$

Calculons la somme Sf de la série de Fourier. La fonction f a deux points de discontinuité sur $[-\pi, \pi]$: $-\alpha, \alpha$. Comme f est dérivable par morceau, et comme f est continue sur $[-\pi, \pi] \setminus \{-\alpha, \alpha\}$, d'après le théorème de Dirichlet,

$$f(x) = Sf(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin(n\alpha)}{\pi n} \cos(nx), \text{ pour tout } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\alpha, \alpha\},$$

$$Sf(-\alpha) = \frac{f((-\alpha)^+) + f((-\alpha)^-)}{2} = \frac{1}{2}, \quad Sf(\alpha) = \frac{f(\alpha^+) + f(\alpha^-)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f . Comme f est paire, $b_n = 0$ et donc on calcule a_0 et a_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} x dx \right) = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Calculons la somme Sf de la série de Fourier. Comme f est dérivable par morceau, et comme f est continue sur \mathbb{R} , d'après le théorème de Dirichlet,

$$f(x) = Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Application. En prenant $x = 0$, on obtient

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Applications définies sur un intervalle fermé et borné

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application où $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite développer f en séries de Fourier. Pour ce faire, on cherche une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de période $T \geq b - a$ telle que la restriction de g à $[a, b]$ coïncide avec f .

Si g satisfait les conditions de Dirichlet, on aura

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

aux points où g est continue. En particulier, aux points où f est continue

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Propriété

Soit $f : [a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceau telle que $f(a) = f(a + 2\pi)$. Alors il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique et continue par morceau qui coïncide avec f sur $[a, a + 2\pi]$.

Preuve

On translate le graphe de f sur les intervalles de la forme $[a + 2k\pi, a + 2(k + 1)\pi]$ qui recouvrent \mathbb{R} . On a

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a + 2k\pi, a + 2(k + 1)\pi], \text{ et on définit } g \text{ sur } [a + 2k\pi, a + 2(k + 1)\pi]$$

$$\text{par } g(x) = f(x - 2k\pi)$$

On vérifie bien que g est 2π -périodique et coïncide sur $[a, a + 2\pi]$ avec f . □

Exemple 3

Développons en série de Fourier la fonction e^x sur l'intervalle $]0, \pi[$. On définit

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in]0, \pi[\\ e^{-x} & \text{si } x \in]-\pi, 0]. \end{cases}$$

Alors f vérifie les conditions de la propriété précédente et donc il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique qui coïncide avec f sur $] - \pi, \pi[$. La fonction g est paire et donc on calcule a_0 et a_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} e^x dx \right) = \frac{2(e^{\pi} - 1)}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = 2 \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2}.$$

Donc pour tout $x \in]0, \pi[$, on a

$$e^x = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1 + n^2} \cos(nx).$$