CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU FINAL

(Mercredi 04 janvier 2017. Durée : 2 heures)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (3 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. (1 pt)

   On a
   $$P_A(X) = -X \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = -X[(2-X)^2 - 1].$$
   Donc $P_A(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$ ou $(2-X)^2 = 1$ si et seulement si $X = 0$ ou $X = 3$ ou $X = 1$. Donc les valeurs propres de A sont 0, 3 et 1 chacune de multiplicité algébrique 1.

2. Montrer que A est diagonalisable et expliciter une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$ [On ne demande pas de calculer P^{-1}]. (2pts)

   On remarque que A est symétrique et donc A est diagonalisable dans une base orthonormée. On calcule les sous-espaces propres. Soit $\vec{u} = (x, y, z)$. Alors
   $$\vec{u} \in E_0 \Leftrightarrow 2y + z = 0 \text{ et } y + 2z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ et } z = 0.$$
   Par conséquent le vecteur $\vec{u}_0 = (1, 0, 0)$ est générateur de E_0 et $(\vec{u}_0)$ est une base de E_0.

   Pour E_3, on a
   $$\vec{u} \in E_3 \Leftrightarrow 0 = 3x \text{ et } 2y + z = 3y \text{ et } y + 2z = 3z \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = z$$
   et par conséquent le vecteur $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$ est générateur de E_3 et $(\vec{u}_1)$ est une base de E_3.

   Pour E_1, on a
   $$\vec{u} \in E_1 \Leftrightarrow 0 = x \text{ et } 2y + z = y \text{ et } y + 2z = z \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = -z$$

et donc le vecteur $\vec{u}_2 = (0, 1, -1)$ *est générateur de* E_1 *et* $(\vec{u}_2)$ *est une base de* E_1. *Pour avoir une base orthonormée, on prend*

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{u}_0}{\|\vec{u}_0\|} = (1, 0, 0),\ \vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}).$$

Donc $\mathcal{B} = (\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ *est une base orthonormée et la matrice diagonale équivalente à* A *est*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ *où* P *est la matrice de passage de la base canonique à la base* $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (4 pts) Discuter selon les valeurs des réels $a, b \in \mathbb{R}$ où $a \neq 0$, la convergence de la série numérique de terme général u_n donné pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}.$$

[*Indication : Étudier séparément les cas* $|b| \leq 1$ *et* $|b| > 1$. *Pour chaque cas, trouver un équivalent simple de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *puis étudier la série associée.*]

On étudie les deux cas $|b| \leq 1$ *et* $|b| > 1$.

Cas 1 : $|b| \leq 1$. *Dans ce cas* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^n}{2^{\sqrt{n}}} = 0$ *et donc*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}} + b^n}{2^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{b^n}{2^{\sqrt{n}}} = 1$$

et $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$. *D'où*

$$|u_n| \sim |a|^n.$$

Si $|a| \geq 1$ *alors le terme général* u_n *ne tend pas vers* 0 *et donc la série* $\sum u_n$ *est divergente. Si* $|a| < 1$ *alors la série* $\sum |a|^n$ *est une série géométrique convergente. Par le critère des équivalents, la série* $\sum |u_n|$ *est convergente et donc de même pour* $\sum u_n$ *(convergence absolue).*

Cas 2 : $|b| > 1$. *Dans ce cas* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = 0$ *et donc*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \times \frac{b^n}{a^n 2^{\sqrt{n}}} = 1$$

et donc $u_n \sim \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n}$*. On pose* $v_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n}$ *et on étudie la série* $\sum v_n$*. On peut utiliser le critère de D'Alembert :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a|^{n+1}2^{\sqrt{n+1}}}{|b|^{n+1}} \times \frac{|b|^n}{|a|^n 2^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a|}{|b|} \times 2^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ *(On multiplie par exemple par la quantité conjuguée) on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

On remarque que si $|a| \geq |b|$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ *et donc la série* $\sum u_n$ *n'est pas convergente.*

D'après le critère de D'Alembert si $\dfrac{|a|}{|b|} < 1$ *la série* $\sum v_n$ *est convergente et si* $\dfrac{|a|}{|b|} > 1$ *la série* $\sum v_n$ *est divergente. On conclut par le critère des équivalents que si* $|a| < |b|$ *alors la série* $\sum u_n$ *est (absolument) convergente.*

Exercice 3. (5 pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2xy' + 2y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1. (1 pt)

   D'après la forme de Taylor-Maclaurin,

   $$a_0 = \frac{y(0)}{0!} = y(0) = 1, \;\; a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = y'(0) = 0.$$

2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence

   $$a_n = \frac{-2}{n} a_{n-2}, \;\; \text{pour tout } n \geq 2.$$

   (2 pts)

   On a

   $$y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \;\; xy'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^n,$$

et

$$y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

En remplaçant dans (E),

$$y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n\geq 1} na_n x^n + 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2\sum_{n\geq 0}(n+1)a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}(n+1)[(n+2)a_{n+2} + 2a_n]x^n.$$

D'où par l'unicité du développement en série entière :

$$a_{n+2} = \frac{-2}{n+2}a_n \text{ pour tout } n \geq 0,$$

ce qu'on peut réécrire

$$a_n = \frac{-2}{n}a_{n-2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$

3. Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. (1 pt)

   Par récurrence sur n,

$$a_{2k} = \frac{-2}{2k}a_{2(k-1)} = \frac{(-2)^2}{(2k)(2(k-1))}a_{2(k-2)} = \frac{(-2)^3}{(2k)(2(k-1))(2(k-3))}a_{2(k-3)}$$

   et donc

$$a_{2k} = \frac{(-2)^k}{(2k)(2(k-1))\cdots 2}a_0 = \frac{(-2)^k}{2^k k!} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

   car $a_0 = 1$. De même

$$a_{2k+1} = \frac{-2}{2k+1}a_{2(k-1)+1} = \frac{(-2)^2}{(2k+1)(2k-1)}a_{2(k-2)+1}$$

$$= \frac{(-2)^k}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 1}a_1 = 0,$$

   car $a_1 = 0$.

4. Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence. (1 pt)

   La série obtenue est

$$y(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}.$$

Calculons le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$*. Par la règle de D'Alembert*

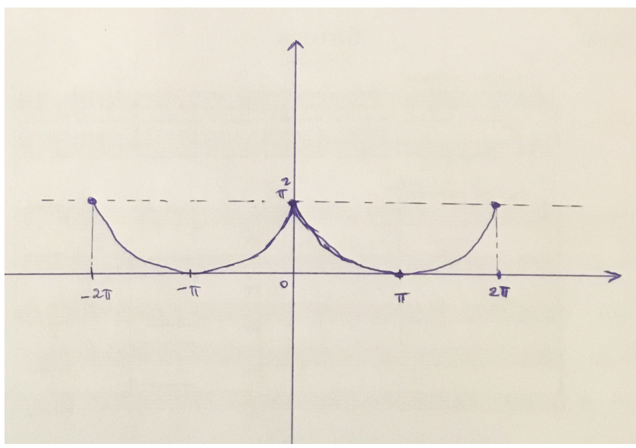
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$*.*
On conclut que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$ *est aussi* $+\infty$*.*
Grâce au développement de l'exponentielle, on voit que $y(x) = e^{-x^2}$*.*

Exercice 4. (8pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = (x-\pi)^2, \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$. (1pt)



2. Montrer que f est paire. (1pt)

Comme f *est* 2π*-périodique, il suffit de montrer que* $f(-x) = f(x)$ *pour tout* $x \in [-2\pi, 2\pi]$*. Si* $x \geq 0$ *(donc* $x \in [0, 2\pi]$*) alors* $-2\pi \leq -x \leq 0$ *et* $-x + 2\pi \in [0, 2\pi]$*. Comme* f *est* 2π*-périodique, on a*

$$f(-x) = f(-x+2\pi) = (-x+2\pi-\pi)^2 = (-x+\pi)^2 = (x-\pi)^2 = f(x).$$

3. Calculer les coefficients de Fourier de f. (2pts)

La fonction f *est paire et donc* $b_n = 0$ *pour tout* $n \geq 1$*. On calcule* a_n*.*

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x-\pi)^2 \, dx = \frac{2}{\pi} [\frac{(x-\pi)^3}{3}]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Pour tout $n \geq 1$*, en effectuant le changement de variable* $t = x - \pi$ *et en appliquant une intégration par parties, on a*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x-\pi)^2 \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 t^2 \cos(nt+n\pi) \, dt = \frac{2(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^0 t^2 \cos(nt) \, dt$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi}\left(\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} 2t\frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right) = \frac{-4(-1)^n}{\pi n}\int_{-\pi}^{0} t\sin(nt)\,dx.$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-4(-1)^n}{\pi n}\left(\left[\frac{-t\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right) \\ &= \frac{-4(-1)^n}{\pi n} \times \frac{-\pi\cos(n\pi)}{n} = \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

4. En déduire la série de Fourier de f. On notera sa somme Sf. (1pt)

   La série de Fourier de f est

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx).$$

5. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (1pt)

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. De même elle est dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, par le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $Sf(x) = f(x)$. En particulier pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$(x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx).$$

6. Calculer les sommes des séries numériques suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

(2pts)

Pour la première somme, on prend $x = 0$ dans la précédente formule

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} = (0-\pi)^2$$

et d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour calculer la seconde somme, on prend $x = \pi$

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\cos(n\pi) = (\pi-\pi)^2$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \times (-\frac{\pi^2}{3}) = \frac{-\pi^2}{12}.$$

Pour calculer la troisième somme, on applique l'égalité de Parseval

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx$$

et donc

$$(\frac{\pi^2}{3})^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^4 \, dx.$$

D'où

$$\frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{(x-\pi)^5}{5}\Big]_0^{2\pi} = \frac{\pi^4}{5}$$

et enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8} \times (\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 5. Bonus (5pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + \gamma y = f(x)$$

où f est une fonction 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}^*$. On suppose que (E) admet une solution particulière y_0, 2π-périodique et développable en série de Fourier :

$$y_0(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)).$$

1. Montrer qu'on a $\alpha_0 = \dfrac{a_0}{\gamma}$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\alpha_n = \frac{\gamma a_n - n b_n}{n^2 + \gamma^2}, \quad \beta_n = \frac{n a_n + \gamma b_n}{n^2 + \gamma^2}.$$

où $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est le développement en série de Fourier de f. (3pts)

On a

$$y_0'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-n\alpha_n \sin(nx) + n\beta_n \cos(nx))$$

et en remplaçant dans l'équation, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-n\alpha_n \sin(nx) + n\beta_n \cos(nx)) + \gamma\Big(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))\Big) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

et donc

$$\gamma \frac{\alpha_0}{2} - \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big([\gamma \alpha_n + n\beta_n - a_n] \cos(nx) + [\gamma \beta_n - n\alpha_n - b_n] \sin(nx) \Big) = 0.$$

Par l'unicité du développement, on déduit

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{\gamma},\ \gamma\alpha_n + n\beta_n - a_n = 0,\ \gamma\beta_n - n\alpha_n - b_n = 0, \ \ n \geq 1.$$

En résolvant le système obtenu où les inconnues sont α_n et β_n, on a

$$\alpha_n = \frac{\gamma a_n - n b_n}{n^2 + \gamma^2}, \ \ \beta_n = \frac{n a_n + \gamma b_n}{n^2 + \gamma^2}.$$

2. Exprimer en fonction des coefficients a_n et b_n, l'énergie totale du signal représenté par y_0

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_0(x)^2 \, dx$$

comme la somme d'une série numérique. (2pts)

On utilise l'égalité de Parseval

$$\frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_0(x)^2 \, dx.$$

On a donc

$$\frac{a_0^2}{4\gamma^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+\gamma^2)^2} \Big[(\gamma a_n - n b_n)^2 + (n a_n + \gamma b_n)^2 \Big]$$

$$= \frac{a_0^2}{4\gamma^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+\gamma^2)^2} \Big[(n^2+\gamma^2)(a_n^2 + b_n^2) \Big] = \frac{a_0^2}{4\gamma^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{n^2+\gamma^2}$$

et finalement

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_0(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{4\gamma^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{n^2+\gamma^2}.$$