CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU FINAL

Mercredi 6 janvier 2016

Durée : 2 heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (4pts) On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = (x + 3y, 3x + y).$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C}$. La matrice A est-elle symétrique ? (1pt)

   On a $f(\vec{e}_1) = (1, 3)$ et $f(\vec{e}_2) = (3, 1)$. Par conséquent la matrice A de f est

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Comme A est égale à sa transposée, A est symétrique.

2. Calculer les valeurs propres de A. (1pt)

   On a

   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 3 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 9$$

   et $P_A(X) = 0$ si et seulement si $1 - X = \pm 3$ si et seulement si $X = -2$ ou $X = 4$. Donc les valeurs propres de A sont -2 et 4 chacune de multiplicité algébrique 1.

3. Montrer que A est diagonalisable et expliciter une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$ [On ne demande pas de calculer P^{-1}]. (2pts)

   Comme A est symétrique, A est diagonalisable dans une base orthonormée. On calcule les sous-espaces propres. Soit $\vec{u} = (x, y)$. Alors

   $$\vec{u} \in E_{-2} \Leftrightarrow x + 3y = -2x \text{ et } 3x + y = -2y \Leftrightarrow x + y = 0$$

   et par conséquent le vecteur $\vec{u} = (1, -1)$ est générateur de E_4 et $(\vec{u})$ est une base de E_{-2}. Soit $\vec{v} = (x, y)$. Alors

   $$\vec{v} \in E_{-2} \Leftrightarrow x + 3y = 4x \text{ et } 3x + y = 4y \Leftrightarrow x = y$$

et par conséquent le vecteur $\vec{v} = (1,1)$ est générateur de E_4 et $(\vec{v})$ est une base de E_4.
Pour avoir une base orthonormée, on prend

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}),\ \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

et donc $\mathcal{B} = (\vec{u}', \vec{v}')$ est une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (4pts) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (n+1)^2}, \quad n \geq 1.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? (1pt)

   On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

   $$\frac{1}{n^\alpha (n+1)^2} \sim \frac{1}{n^{\alpha+2}}$$

   et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha + 2 \geq 0$ si et seulement si $\alpha \geq -2$.

2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle convergente ? (2pts)

   Comme les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}}$ sont à termes positifs et comme $u_n \sim \frac{1}{n^{\alpha+2}}$; elles sont de la même nature. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}}$ est une série de Riemann et elle est convergente si et seulement si $\alpha + 2 > 1$ si et seulement si $\alpha > -1$. Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > -1$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$. (1pt)

   On utilise le critère de D'Alembert

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha (n+1)^2}{(n+1)^\alpha (n+2)^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^\alpha = 1$$

   et donc le rayon de convergence est 1.

Exercice 3. (6pts) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n \geq 0.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)}.$$

(1pt)

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \times \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)}.$$

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. (1pt)

On utilise le critère de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} = 4$$

et donc le rayon de convergence R est $1/4$.

3. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n,$$

définie sur $]-R, R[$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1-4x)y' - 2y = 0$$

et vérifie la condition initiale $y(0) = 1$ [Indication : en vérifiant la relation que doit vérifier les coefficients d'une série entière solution de (E), montrer que la série entière $f(x)$ donnée ci-dessus est solution de (E)]. (2,5pts)

On a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$$

et en remplaçant dans l'équation (E)

$$(1-4x)f' - 2f = f' - 4xf' - 2f = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n - 2u_0 - \sum_{n=1}^{+\infty}(4nu_n + 2u_n)x^n = u_1 - 2u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)u_{n+1} - 2(2n+1)u_n)x^n = 0.$$

Par l'unicité de l'écritre d'une série entière, on doit avoir

$$u_1 - 2u_0, \quad (n+1)u_{n+1} - 2(2n+1)u_n = 0$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)}.$$

La relation précédente est vraie d'après la question (1) et donc f *est bien solution de* (E)*. On a* $f(0) = u_0 = 1$ *et donc* f *vérifie la condition initiale* $y(0) = 1$.

4. Résoudre l'équation différentielle (E), en déduire l'expression de $f(x)$. (1,5pts)

   Sur $I =]-R, R[=]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, (E) *est équivalente à l'équation*

$$y' - \frac{2}{1-4x}y = 0$$

dont la solution générale est de la forme

$$y(x) = C\exp(A(x))$$

où $C \in \mathbb{R}$ *et* $A(x)$ *une primitive de* $\frac{2}{1-4x}$*. On a*

$$\int \frac{2}{1-4x}\,dx = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right) + \alpha$$

et donc on peut prendre $A(x) = \ln(\frac{1}{\sqrt{1-4x}})$*. D'où la solution générale est*

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{1-4x}}$$

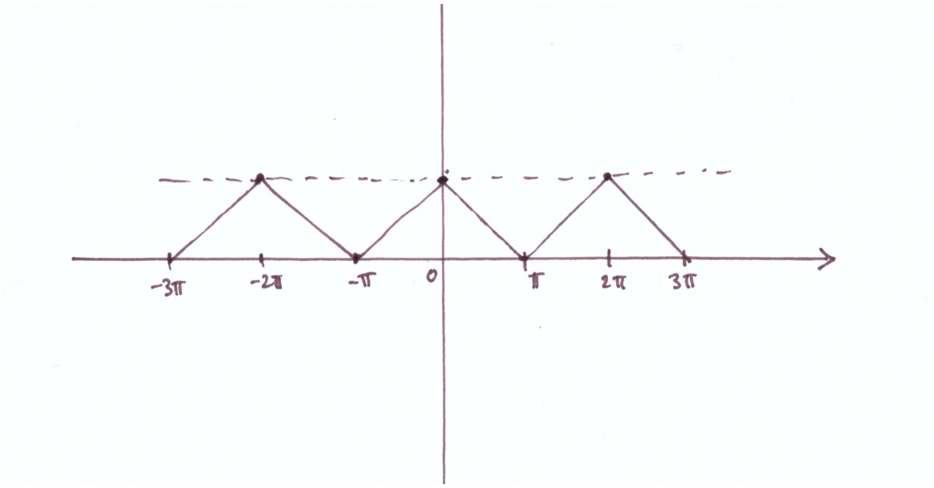
et comme f *vérifie la condition initiale* $y(0) = 1$*, on déduit* $C = 1$ *et enfin*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Exercice 4. (7pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{pour } x \in [-\pi, 0] \\ \pi - x & \text{pour } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. Vérifier que f est paire. (1,5pts)



On a sur $[-\pi,\pi]$, $f(-x)=\pi-x=f(x)$, *si* $x\geq 0$ *et* $f(-x)=\pi+x=f(x)$ *si* $x\leq 0$. *Donc* f *est paire.*

2. Calculer les coefficients de Fourier de f. (2pts)

Comme f *est paire,* $b_n=0$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. *On calcule donc* a_n. *On a*

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\pi x-\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi=\pi.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-x)\cos(nx)\,dx=\frac{-2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi\sin(nx)\,dx=\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}.$$

3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf. (1pt)

La série de Fourier de f *est*

$$\pi/2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos(nx).$$

4. Pour quelles valeurs de $x\in\mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x)=f(x)$? (1pt)

La fonction f *est continue et dirivable par morceaux. Donc d'après le théorème de Dirichlet* $f(x)=Sf(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *où* f *est continue en* x. *Donc* $f(x)=Sf(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

5. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(1,5pts)

On a

$$\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair, } n = 2p, \\ \frac{4}{\pi(2p+1)^2} & \text{si } n \text{ est impair, } n = 2p+1. \end{cases}$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\pi/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2} \cos(nx) = \pi/2 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} \cos((2p+1)x) = f(x).$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$\pi/2 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} = f(0) = \pi$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \pi^2/8.$$

Exercice 5. Bonus (5pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y - y'' = f(x)$$

où f est la fonction 2π-périodique de l'exercice 4. On suppose que (E) admet une solution particulière y_0 paire, 2π-périodique et développable en série de Fourier :

$$y_0(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\alpha_n = \frac{a_n}{n^2+1}$$

où $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ est le développement en série de Fourier de f. (2pts)

On a

$$y_0'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n \sin(nx), \quad y_0''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\alpha_n \cos(nx).$$

En remplaçant dans l'équation (E) on obtient

$$y_0(x) - y_0''(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n + n^2\alpha_n) \cos(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

Par l'unicité du développement en série de Fourier, on obtient

$$\frac{\alpha_0}{2} = \frac{a_0}{2}, \ \alpha_n + n^2\alpha_n = a_n.$$

D'où la formule valable pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \frac{a_n}{n^2+1}.$$

2. En déduire la solution générale de (E). (1pt)

D'après ce qui précède

$$\alpha_0 = a_0 = \pi,\ \alpha_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2(n^2+1)},\ n \geq 1$$

et la série

$$y_0(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2(n^2+1)}\right)\cos(nx)$$

est solution particulière de (E)*. Résolvons l'équation homogène*

$$(EH) \qquad y - y'' = 0.$$

l'équation caractéristique (EC) *associée est* $-r^2+1=0$ *dont les solutions sont* $r_0 = 1, r_1 = -1$*. Par conséquent la solution générale de* (EH) *est*

$$y_{EH} = C_1e^x + C_2e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où la solution générale de (E) *est*

$$y_E = C_1e^x + C_2e^{-x} + y_0(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Exprimer l'énergie totale du signal représenté par y_0

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_0(x)^2\,dx$$

comme la somme d'une série numérique. (2pts)

On utilise l'égalité de Parseval

$$E = \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^2.$$

On a donc

$$E = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2(n^2+1)}\right)^2.$$