Correction de l'exercice 3 du TD4

Nous noterons $\mathscr{E} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Question 1

$M_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $f(\overrightarrow{e_i})$ dans la base $\mathscr{E}$.

Question 2

Les valeurs propres de f sont, d'après une proposition du cours, les racines du polynôme caractéristique de f. On rappelle que le polynôme caractéristique de f est défini de la façon suivante :

$$P_f(X) = det(M_{\mathscr{E}}(f) - XI_3)$$

Il s'agit d'un polynôme de degré égal à la taille de la matrice A : ici 3. On rappelle également que la définition de $P_f(X)$ ne dépend pas de la base de la matrice associée à f choisie : ici, on considère la matrice A associée à f dans la base canonique mais si l'on considère une autre base notée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$, on aura également :

$$P_f(X) = det(M_{\mathscr{B}}(f) - XI_3)$$

car on peut montrer que :

$$det(M_{\mathscr{E}}(f) - XI_3) = det(M_{\mathscr{B}}(f) - XI_3)$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
det(M_{\mathscr{E}}(f) - XI_3) &= det(\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \\
&= det(\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}) \\
&= det(\begin{pmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (3-X)(2-X)(1-X)
\end{aligned}$$

On résout :

$$P_f(X) = 0$$

On trouve de suite :

$$P_f(X) = 0 \Leftrightarrow (3-X)(2-X)(1-X) = 0 \Leftrightarrow X \in \{1,2,3\}$$

Donc les valeurs propres de f sont 1,2 et 3. On notera : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

Remarque 0.0.1
Rappelons ce que signifie que $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ est une base de diagonalisation de f. Cela signifie que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice diagonale, donc de la forme :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

Par définition, cela signifie que l'on a pour tout i entre 1 et 3 :

$$f(\overrightarrow{u_i}) = \mu_i.\,\overrightarrow{u_i}$$

Donc cela signifie que les u_i sont des vecteurs propres de f, et que les μ_i de la diagonale de la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ sont des valeurs propres, et sont associées respectivement aux vecteurs propres $\overrightarrow{u_i}$.

Donc dire que $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ est une base de diagonalisation de f revient à dire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres de f. Et la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ associée à f dans cette base sera la matrice ayant μ_1, μ_2 et μ_3 sur la diagonale.

Remarque 0.0.2
Jusque là, on a parlé de diagonalisation d'une application linéaire f : on rappelle la définition : f est diagonalisable s'il existe une base de diagonalisation de f, c'est-à-dire une base vérifiant ce que l'on a dit dans la remarque précédente.
Mais on peut également parler de diagonalisation d'une matrice A : on rappelle la définition : A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}.A.P$$

Voyons le lien entre la diagonalisation d'une application linéaire et d'une matrice : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par exemple et notons $A = M_{\mathscr{E}}(f)$ la matrice associée à f dans la base canonique. Dire que f est diagonalisable revient à dire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de diagonalisation, c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_{\mathscr{B}}(f)$ soit une matrice diagonale. Or, vous connaissez maintenant par coeur la formule suivante :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}^{-1}.M_{\mathscr{E}}(f).P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$$

Donc on a l'existence d'une matrice diagonale D ($D = M_{\mathscr{B}}(f)$) et d'une matrice inversible P ($P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$) telles que, en notant : $A = M_{\mathscr{E}}(f)$, on ait :

$$D = P^{-1}.A.P$$

On vient donc de montrer que si un endomorphisme f est diagonalisable, alors la matrice $M_{\mathscr{E}}(f)$ est une matrice diagonalisable et de même on montre que cela est vrai pour n'importe quelle base $\mathscr{E}'$ de $\mathbb{R}^3$: si un endomorphisme f est diagonalisable, alors la matrice $M_{\mathscr{E}'}(f)$ est diagonalisable.

Réciproquement, soit A une matrice diagonalisable de $M_3(\mathbb{R})$. Par définition cela signifie qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}.A.P$$

Considérons l'endomorphisme, noté f, associé à A dans la base canonique, c'est-à-dire l'endomorphisme défini par :

$$f(x, y, z) = A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ou de façon équivalente, défini par (entre guillemets) :

$$M_{\mathscr{E}}(f(\overrightarrow{e_i})) = i\grave{e}me\ colonne\ de\ A$$

on a alors par définition :

$$A = M_{\mathscr{E}}(f)$$

Notons par ailleurs $\overrightarrow{u_i}$ les vecteurs dont les composantes dans la base canonique sont respectivement la ième colonne de P. On voit que par définition, on a :

$$P = M_{\mathscr{E}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$$

De plus, comme P est inversible, d'après le cours $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}$. On a alors par définition :

$$P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}.A.P \\ &= P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}^{-1}.M_{\mathscr{E}}(f).P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} \end{aligned}$$

Donc d'après la formule que vous connaissez par coeur :

$$D = M_{\mathscr{B}}(f)$$

Donc $M_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale, donc $\mathscr{B}$ est une base de diagonalisation de f et donc f est diagonalisable.
On vient de montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors l'endomorphisme f associé à A dans la base canonique est diagonalisable. De même, on montre que cela est vrai pour toute base $\mathscr{E}'$ de $\mathbb{R}^3$: si A est une matrice diagonalisable, alors l'endomorphisme g associé à A dans la base $\mathscr{E}'$ est diagonalisable.

Remarque 0.0.3
On rappelle que l'ensemble constitué du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1 *de* f *par exemple est appelé sous-espace propre de* f *associé à la valeur propre* λ_1 *et est défini de la façon suivante :*

$$E_{\lambda_1}(f) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 | f(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 . \overrightarrow{v}\}$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$*, ce que je vous encourage vivement à vérifier par vous-mêmes afin de vous en convaincre définitivement.*
On a :

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1}(f) &= \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 | f(\overrightarrow{v}) = \lambda_1 . \overrightarrow{v}\} \\ &= \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 | f(\overrightarrow{v}) - \lambda_1 . \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}\} \\ &= \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 | (f - \lambda_1 . Id)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}\} \\ &= Ker(f - \lambda_1 . Id) \end{aligned}$$

où Id *est l'application identique de* $\mathbb{R}^3$ *dans lui-même.*
Comme on sait que le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel, et comme l'application $(f - \lambda_1 . Id)$ *est linéaire (somme d'applications linéaires), la dernière ligne montre notamment que les sous-espaces propres sont des espaces vectoriels.*

Remarque 0.0.4
On rappelle le critère pour montrer qu'un endomorphisme f *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n *est diagonalisable :* f *est diagonalisable si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $P_f(X)$ *est scindé dans* $\mathbb{K}[X]$*.*
   On a alors $P_f(X)$ *de la forme :*

   $$P_f(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \times \ldots \times (X - \lambda_p)^{m_p}$$

   où les λ_i *sont les valeurs propres de* f *et les* m_i *leurs degrés algébriques respectifs. On rappelle que l'on a toujours :*

   $$m_1 + \ldots + m_p = n$$

2. *Pour TOUT* i *entre 1 et* p *le degré algébrique de* λ_i (m_i) *et le degré géométrique de* λ_i *(c'est-à-dire* $dim(E_{\lambda_i}(f))$*) sont égaux.*

Remarque 0.0.5
On a "un raccourci" dans le cas où l'on trouve exactement autant de valeurs propres distinctes que le degré n *de* E *: un résultat du cours nous dit la chose suivante :*
Soit f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n*. Si* f *admet* n *valeurs propres distinctes* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*, alors* f *est diagonalisable.*

Question 4

D'après la remarque 0.0.5, f est diagonalisable puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 et f a trois valeurs propres distinctes.

On cherche à présent une base $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ de diagonalisation de f.

On commence par chercher les vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1, 2 et 3. Calculons :

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1}(f) &= E_1(f) \\ &= Ker(f - Id) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}(f) &\Leftrightarrow (f - Id)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (A - I_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow det(\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a 3 inconnues et seulement 2 équations : on passe z en paramètre :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ y = 0 \end{cases}$$

On trouve ensuite x et y en foncton de z "en remontant" et en remplaçant y par sa valeur :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ engendre $E_{\lambda_1}(f)$. De plus, cette famille étant composée d'un unique vecteur non nul, elle est libre donc constitue une base de $E_{\lambda_1}(f)$ qui

est de dimension 1.
On fait de même pour déterminer une base de $E_{\lambda_2}(f)$ et $E_{\lambda_3}(f)$ et on trouve respectivement les familles

$$\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

et

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$$

On rappelle les propositions suivantes du cours :

Proposition 0.0.1
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f. On a :

$$f diagonalisable \Leftrightarrow E \text{ est somme directe des sous-espaces propres} E_{\lambda_i}(f)$$

où on rappelle que E est somme directe des $E_{\lambda_i}(f)$ si :

1. $E = E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}$
2. Pour tous $\vec{u_i} \in E_{\lambda_i}(f)$ tels que :

$$\vec{u_1} + \ldots + \vec{u_p} = \vec{0}$$

on a :

$$\vec{u_1} = \ldots = \vec{u_p} = \vec{0}$$

Proposition 0.0.2
Si pour tout i, on note $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(f)$, on a :
E est somme directe des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(f)$ si et seulement si $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de E

On utilise ces propositions pour conclure que : $\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Elle est composée de vecteurs propres de f (associés aux valeurs propres 1, 2 et 3 respectivement) donc il s'agit d'une base de diagonalisation de f que l'on note $\mathscr{B}$ et on a :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

En notant : $D = M_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$, on a alors d'après une formule du cours :

$$D = P^{-1}.A.P$$

ou de façon équivalente :

$$A = P.D.P^{-1}$$

Exercice 4

Question 1

Etape 1 : Calcul du poynôme caractéristique :
$P_A(X) = det(A - XI_2)$ et le calcul donne :

$$P_A(X) = (4 - X)(-2 - X)$$

Le polynôme caractéristique est scindé donc on passe à :
Etape 2 : recherche des racines de $P_A(X)$:

$$P_A(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \{-2, 4\}$$

Donc $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 4$ sont les valeurs propres de A. Commme pour l'exercice précédent, on a une matrice de taille 2 et on a 2 valeurs propres distinctes, donc d'après le cours A est diagonalisable. Faisons quand même la méthode générale, que l'on aurait appliquée si on n'avait trouvé qu'une seule valeur propre : on n'aurait alors pas utiliser la remarque 0.0.5 pour conclure directement et on aurait dû comparer les degrés arithmétique et géométrique de la valeur propre trouvée. Faisons le :
Etape 3 (ici inutile mais on s'entraîne) : comparaison des degrés arithmétique et géométrique de λ_1 et λ_2. Pour λ_1 :
Le degré arithmétique de λ_1, noté m_1 est la puissance du facteur $(X - \lambda_1)$ qui apparaît dans le polynôme caractéristique, donc $m_1 = 1$.
Le degré géométrique de λ_1 est la dimension de $E_{\lambda_1}(A)$: il faut donc par exemple trouver une base de $E_{\lambda_1}(A)$ pour le trouver. C'est ce que l'on fait exactement comme à la question 3 de l'exercice 3 et on trouve que $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ est une base de $E_{\lambda_1}(A)$. Donc $dim(E_{\lambda_1}(A)) = 1 = m_1$

Pour λ_2 :
Le degré arithmétique de λ_2, noté m_2 est la puissance du facteur $(X - \lambda_2)$ qui apparaît dans le polynôme caractéristique, donc $m_2 = 1$.
Le degré géométrique de λ_1 est la dimension de $E_{\lambda_2}(A)$: il faut donc par exemple trouver une base de $E_{\lambda_2}(A)$ pour le trouver. C'est ce que l'on fait exactement comme à la question 3 de l'exercice 3 et on trouve que $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est une base de $E_{\lambda_1}(A)$. Donc $dim(E_{\lambda_2}(A)) = 1 = m_2$

Donc f est diagonalisable.
Etape 4 : utilisation des propositions 0.0.1 et 0.0.2 pour trouver une base de diagonalisation de f.

D'après ces propositions énoncées plus haut, $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est une base de f.

Comme elle est constituée de vecteurs propres de f, c'est une base de diagonalisation de f, notée $\mathscr{B}$ et on a :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc en notant $D = M_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$ on a :

$$D = P^{-1}.A.P$$

ou :

$$A = P.D.P^{-1}$$

Question 2

$$A^n = P.D^n.P^{-1}$$

On fait le calcul, en sachant que :

$$D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Question 3

On a, en écrivant le système matriciellement :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on a :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n. \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

On calcule $A^n. \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ à l'aide de la valeur de A^n trouvée à la question 2 : d'après l'égalité (1), on trouve un vecteur colonne dont le premier coefficient est égal à u_n et le second à v_n, ce qui nous donne la réponse à la question 3.