Définition 0.0.1
Une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est dite absolument convergente si la série numérique* $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ *converge.*

La définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est basée sur le théorème suivant :

Théorème 0.0.1
Soit r *un réel positif tel que la suite numérique* $(a_n r^n)_n$ *est bornée. Alors pour tout nombre complexe* z *tel que* $|z| < r$*, la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge absolument.*

Démonstration 0.0.1
Par hypothèse, il existe M tel que pour tout $n \geq 0$, on ait :

$$a_n r^n \leq M$$

Soit z un nombre complexe non num tel que $|z| = r' < r$.
On a alors :

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |a_n r^n \frac{z^n}{r^n}| \\ &\leq M \frac{r'^n}{r^n} \\ &= M \left(\frac{r'}{r}\right)^n \end{aligned}$$

Comme $\frac{r'}{r} < 1$, $\left(\frac{r'}{r}\right)^n$ est le terme général d'une série (géométrique) convergente donc d'après le théorème de comparaison des séries à coefficients positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ converge.

On pose la

Définition 0.0.2
On définit le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$*, noté* R *par :*

$$R = sup\{r \geq 0, (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

Cela signifie que si l'on note $\mathscr{G} = \{r \geq 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$*,* R *est le plus petit majorant de* $\mathscr{G}$*, c'est-à-dire le plus petit élément vérifiant ceci : pour tout* $r \in \mathscr{G}$*,* $r \leq M$*.*

Remarque 0.0.1
Si r<R, alors la suite $(a_n r^n)_n$ *est bornée.*

Théorème 0.0.2
Le rayon de convergence R *de la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est l'unique élément de* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. *La série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge absolument sur* $\mathscr{E} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$*.*
2. *La série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *diverge grossièrement sur l'ensemble :* $\mathscr{F} = \{z \in \mathbb{C}, |z| > R\}$*. C'est-à-dire que pour tout* $z \in \mathscr{F}$ *fixé, la suite de nombres complexes* $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Remarque 0.0.2 (En pratique)
En pratique, si l'on montre qu'un nombre R_1 *est tel que pour tout* $r < R_1$ *la suite* $(a_n r^n)_n$ *est bornée ou tend vers 0 et pour tout* $r > R_1$ *la suite* $(a_n r^n)_n$ *n'est pas bornée ou ne tend pas vers 0, alors* $R_1 = R$

Correction de l'exercice 3 du TD 3

Question 3 Ici, on peut faire un changement de variables pour se ramener à une série entière de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n u^n$, en posant $u = z^3$. en effet, on a alors :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n}}{2^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{2^n}$$

Calculons le rayon de convergence de cette série en u, que l'on note $\widetilde{R}$. On pose $a_n = 1/2^n$ et on calcule :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Donc $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$, et on a, d'après la règle de d'Alembert :

$$\widetilde{R} = 2$$

On cherche maintenant à en déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{z^{3n}}{2^n}$, noté R. Pour cela, on revient au théorème 0.0.2 qui définit le rayon de convergence d'une série entière. On a :

1. Par définition de $\widetilde{R}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{2^n}$ converge absolument sur $\{u \in \mathbb{C}, |u| < 2\}$. Donc, puisque $u = z^3$, $\sum_{n\geq 0}\frac{z^{3n}}{2^n}$ converge absolument sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < \sqrt[3]{2}\}$
2. Par définition de $\widetilde{R}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{2^n}$ diverge grossièrement sur $\{u \in \mathbb{C}, |u| > 2\}$. Donc, puisque $u = z^3$, $\sum_{n\geq 1}\frac{z^{3n}}{2^n}$ diverge grossièrement sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < \sqrt[3]{2}\}$

Donc d'après le théorème 0.0.2, $R = \sqrt[3]{2}$.

Question 4 On a :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{z^{n^2}}{n} = \sum_{k\geq 0} b_k z^k$$

où :

$$\begin{cases} b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{si k est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On utilise le théorème 0.0.2. Si r>1, la suite $(b_k r^k)_k$ n'est pas bornée puisque la sous-suite $(\frac{1}{\sqrt{k}}r^k)_k$ tend vers $+\infty$. Donc la série $\sum_{k\geq 0} b_k z^k$ diverge grossièrement sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$.
De plus, si r<1, la suite $(b_k r^k)_k$ est bornée par 1. En effet, si k est un carré :

$$b_k r^k = \frac{1}{\sqrt{k}} r^k \leq 1$$

et si k n'est pas un carré on a :

$$b_k r^k = 0 \leq 1.$$

D'après la remarque 0.0.2, $R = 1$.

Exercice 4

Je précise que l'on vous demande de trouver les sommes S(x) des séries entières proposées pour tout x réel du disque de convergence et non pour tout nombre complexe du disque de convergence.
On trouve S(x) en manipulant les dérivées de S(x) ou d'une série entière connue et en tentant de faire des liens pertinents entre ces objets.

Question 1

Avec la règle de d'Alembert, on trouve que le rayon de convergence est R=1.
Notons, pour tout x réel du disque de convergence :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

D'après le cours, S est dérivable sur le disque de convergence et la dérivation se fait terme à terme. Donc en particulier, pour tout x réel du disque de convergence, on obtient :

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Donc

$$S(x) = -ln(1-x) + c$$

où c est une constante.
Comme S(0)=0, on a c=0 et

$$S(x) = -ln(1-x).$$

Question 2

Avec la règle de d'Alembert, on trouve que le rayon de convergence est R=1.
Notons, pour tout x réel du disque de convergence :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$$

On remarque que (astuce très utile à retenir) :

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

D'où :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

Or, on a d'une part :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ (série entière à connaître)}$$

et d'autre part, d'après la question 1, pour tout $x \neq 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\frac{1}{x} ln(1-x)$$

D'où pour tout x réel non nul du disque de convergence :

$$S(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} ln(1-x)$$

De plus $S(0) = 0$.
On remarque que la fonction $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} ln(1-x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, ce qui est normal puisque l'on sait que la somme d'une série entière est continue sur le disque de convergence.

Question 3

Avec la règle de d'Alembert, on trouve que le rayon de convergence est R=1.
Notons, pour tout x réel du disque de convergence :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

On part de l'égalité suivante, valable pour tout x réel de module strictement inférieur à 1 :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

On note $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On va manipuler les dérivées de cette fonction. En dérivant on obtient pour tout x réel de module strictement inférieur à 1 (donc appartenant au disque de convergence de la série entière de l'exercice puisque R=1) :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

d'où :

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

De plus, pour tout x réel du disque de convergence :

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

D'où :

$$x^2 f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

Et finalement, pour tout x réel du disque de convergence :

$$S(x) = xf'(x) + x^2 f''(x)$$

Or, comme $f(x) = \frac{1}{1-x}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Donc pour tout x réel du disque de convergence :

$$S(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

Question 4

Notons $a_n = 3n + 1$.
On remarque que les séries $\sum_{n\geq 0}(3n+1)z^{3n+2}$ et $\sum_{n\geq 0}(3n+1)z^{3n}$ ont même rayon de convergence. En effet, pour tout réel positif fixé r, la suite définie par $u_n = a_n r^{3n+2}$ est bornée si et seulement si la suite définie par $v_n = a_n r^{3n}$ est bornée puisque $u_n = r^2 v_n$. D'après la remarque 0.0.2, la recherche du rayon de convergence des séries $\sum_{n\geq 0}(3n+1)z^{3n+2}$ et $\sum_{n\geq 0}(3n+1)z^{3n}$ dépend uniquement du caractère borné ou non des suites u_n et v_n respectivement donc leur rayon de convergence est identique.
On va donc chercher le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(3n+1)z^{3n}$. On procède exactement de la même façon que dans la question 3 de l'exercice 3 et on trouve que le rayon de convergence est $R = \sqrt[3]{3}$.
Pour tout x réel du disque de convergence, on note :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^{3n+2}$$

On a :

$$S(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^{3n} = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}\right)'$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^3\right)^n \\ &= \frac{x}{1-x^3}\end{aligned}$$

D'où en dérivant cette dernière fonction :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}\right)' = \frac{2x^3+1}{(1-x^3)^2}$$

Donc on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^{3n+2} = x^2 \frac{2x^3+1}{(1-x^3)^2}$$