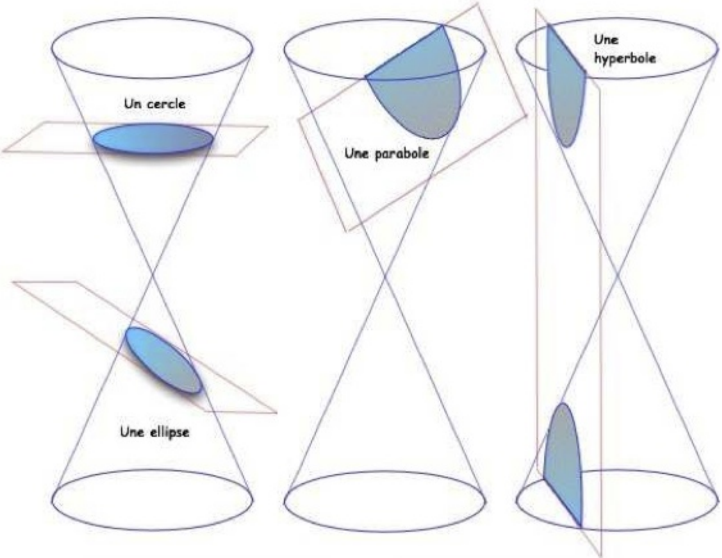
Coniques

Mathmatiques 3, 2016

VI. 5. Coniques

VI. 5. 1. Quelques rappels

Origine



On muni $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique et d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. On considère $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où O est le point d'origine.

Définition monofocale

On considère

- une droite $\mathcal{D}$,
- un point F non situé sur $\mathcal{D}$,
- un réel strictement positif e.

On appelle conique (propre) de droite directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan vérifiant :

$$d(M, F) = e \cdot d(M, \mathcal{D})$$

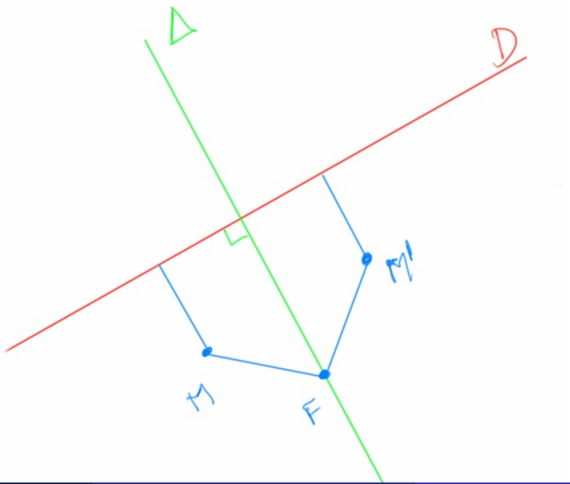
où $d(M, F)$ désigne la distance du point M au point F et $d(M, \mathcal{D})$ désigne la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$.

Définition

- Si $e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse
- Si $e = 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une parabole
- Si $e > 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole

Définition

La droite Δ passant par F et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ est un axe de symétrie appelé l'axe focal de la conique.

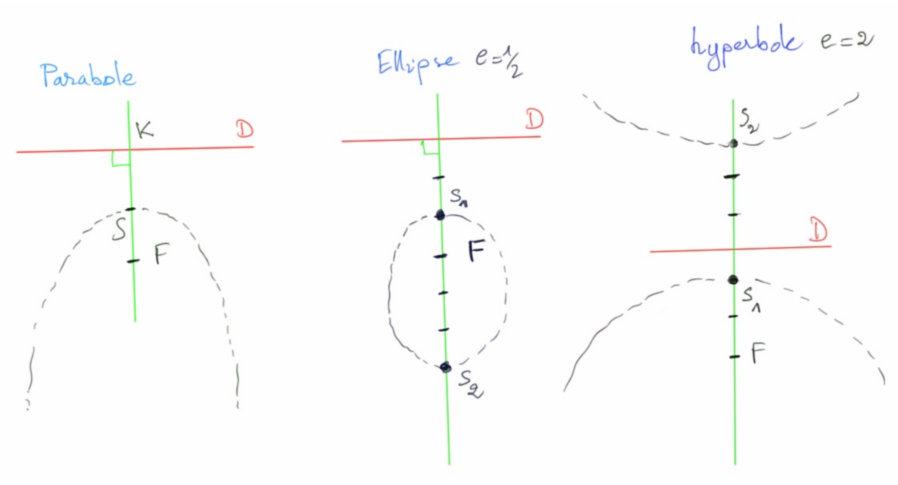


Définition

On appelle sommet de la conique tout point de la conique qui est également sur l'axe focal.

Soit K la projection de F sur la droite $\mathcal{D}$.

- Une parabole admet un unique sommet S : c'est le milieu du segment $[FK]$.
- Une ellipse ou une hyperbole admet deux sommets : S_1 le barycentre des deux points : F avec le poids 1 et K avec le poids e ; S_2 le barycentre des deux points : F avec le poids 1 et K avec le poids $-e$.


Parabole
K
D
S
F
Ellipse e=1/2
D
S1
F
S2
hyperbole e=2
S2
D
S1
F

Propriété (parabole)

Soit $\mathcal{C}$ une parabole. Dans un repère orthonormé $(S, \vec{u}, \vec{v})$ où

- S est le sommet de la parobole,
- $\vec{u} = \frac{\vec{SF}}{\|\vec{SF}\|}$

la parabole $\mathcal{C}$ a comme équation

$$y^2 = 2px.$$

où $p = d(F, \mathcal{D})$.

Réciproquement, dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ toute courbe d'équation $y^2 = 2px$ où $p \geq 0$, est une parabole de sommet O et de Foyer le point $F = (p/2, 0)$ et de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -p/2$.

Propriété (ellipse ou hyperbole)

Soit $\mathcal{C}$ une conique d'excentricité $e \neq 1$ ($\mathcal{C}$ est une ellipse ou une hyperbole). Soit O le milieu du segment $[S_1 S_2]$ où S_1 et S_2 sont les sommets de $\mathcal{C}$.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{\vec{OF}}{\|\vec{OF}\|}$ la conique $\mathcal{C}$ a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

où $a = d(O, S_1)$ et $c = d(O, F)$.

- On a $a^2 - c^2 > 0$ si et seulement si $e < 1$. Dans ce cas $\mathcal{C}$ est une ellipse. En posant $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $\mathcal{C}$ a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- On a $a^2 - c^2 < 0$ si et seulement si $e > 1$. Dans ce cas $\mathcal{C}$ est une hyperbole. En posant $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $\mathcal{C}$ a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Réciproquement ...

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, une courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$ est une ellipse

- de foyer $F = (c, 0)$ où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
- d'excentricité $e = \frac{c}{a}$
- de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = \frac{a^2}{c}$
- de sommets $S_1 = (a, 0)$, $S_2 = (-a, 0)$

De même ...

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, une courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole

- de foyer $F = (c, 0)$ où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- d'excentricité $e = \frac{c}{a}$
- de directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = \frac{a^2}{c}$
- de sommets $S_1 = (a, 0)$, $S_2 = (-a, 0)$

VI. 5. 2. Utilisation des formes quadratiques

Définition algébrique

On appelle **conique** toute courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ admettant dans le repère $\mathcal{R}$ une équation de la forme $F(x, y) = 0$ où

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On cherche un repère adapté dans lequel la conique $\mathcal{C}$ admet une "équation réduite" qui soit aussi simple que possible.

Les termes de degré 2 de F définissent une forme quadratique

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \ (x, y) \mapsto q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

appelée la **partie quadratique** (ou la forme quadratique associée à F) de l'équation F de la conique $\mathcal{C}$.

Nous allons utiliser les propriétés de la forme quadratique q pour trouver la bonne base dans laquelle l'équation de $\mathcal{C}$ est plus simple.

La matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ de q dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \left(\begin{array}{cc} \varphi_q(\vec{i}, \vec{i}) & \varphi_q(\vec{i}, \vec{j}) \\ \varphi_q(\vec{j}, \vec{i}) & \varphi_q(\vec{j}, \vec{j}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a & b/2 \\ b/2 & c \end{array} \right)$$

où φ_q est la forme polaire de q.

La matrice A étant symétrique, elle se diagonalise dans une base orthonormée et en particulier q-orthogonale.

Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée (ou q-orthogonale) de vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de A avec pour valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement.

Il existe alors une matrice (orthogonale) P, à savoir la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, tels que

$$A = PD\,{}^tP, \quad \text{où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathcal{B}'$ est une base q-orthogonale, on a

$$q(\vec{u}) = \lambda_1,\ q(\vec{v}) = \lambda_2,\ \ q(x'\vec{u} + y'\vec{v}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

et donc

$$q(x\vec{i} + y\vec{j}) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

ce qui donne une forme plus simple de q.

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

et en exprimant le terme $dx + ey + f$ en fonction de x' et y', on conclut que l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}')$ s'écrit sous la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \alpha x' + \beta y' + k = 0$$

où $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$.

Donc considérons une base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ orthonormée de vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de A avec pour valeurs propres λ_1 et λ_2 et dans laquelle l'équation de la conique $\mathcal{C}$ est de de la forme

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \alpha x' + \beta y' + k = 0 \tag{1}$$

où $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$. On étudie $\mathcal{C}$ selon les cas suivants.

Premier cas : $\det(A) = ac - \frac{b^2}{4} = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

On réécrit l'équation (1) sous une forme plus simple en utilisant l'identité $(z+t)^2 = z^2 + 2zt + t^2$,

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \alpha x' + \beta y' + k$$

$$= \lambda_1 x'^2 + \lambda_1 2x' \frac{\alpha}{2\lambda_1} + \lambda_2 y'^2 + \lambda_2 2y' \frac{\beta}{2\lambda_2} + k$$

$$= \lambda_1 (x' + \frac{\alpha}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2 (y' + \frac{\beta}{2\lambda_2})^2 + (k - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1} - \frac{\beta^2}{4\lambda_2})$$

et donc on obtient une équation de la forme

$$\lambda_1 (x' - \alpha')^2 + \lambda_2 (y' - \beta')^2 + k' = 0 \tag{2}$$

où

$$\alpha' = \frac{-\alpha}{2\lambda_1},\ \beta' = \frac{-\beta}{2\lambda_2},\ k' = k - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1} - \frac{\beta^2}{4\lambda_2}.$$

(1) Cas $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. Donc λ_1 et λ_2 ont le même signe.

- Si $k' = 0$ alors $\mathcal{C}$ est réduite au point $\omega = (\alpha', \beta')$.
- Si k' est du signe de λ_1 et λ_2, alors $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide.
- Si k' est du signe opposé à λ_1 et λ_2, $\mathcal{C}$ est une **ellipse** (de centre de symétrie $\omega = (\alpha', \beta')$).

(2) Cas $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 < 0$. Donc λ_1 et λ_2 sont de signes oposés.

- Si $k' = 0$ alors l'équation (2) s'écrit

  $$\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}(x' - \alpha')^2 = (y' - \beta')^2$$

  et donc $\mathcal{C}$ est la réunion des deux droites sécantes d'équations

  $$\lambda(x' - \alpha') = (y' - \beta'), \;\; \lambda(x' - \alpha') = -(y' - \beta').$$

  où $\lambda = \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}}$.
- Si $k' \neq 0$ alors $\mathcal{C}$ est une **hyperbole**.

Deuxième cas : $\det(A) = ac - \frac{b^2}{4} = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Dans ce cas, l'une des valeurs propres est nulle et seulement une car $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et donc $A \neq 0$.
Si $\lambda_1 = 0$, l'équation (1) s'écrit

$$\lambda_2(y' - \beta')^2 + \alpha x' + k' = 0 \tag{3}$$

$$\text{où } \beta' = \frac{-\beta}{2\lambda_2} \text{ et } k' = k - \frac{\beta^2}{4\lambda_2},$$

et si $\lambda_2 = 0$ l'équation (1) s'écrit

$$\lambda_1(x' - \alpha')^2 + \beta y' + k' = 0, \text{ où } \alpha' = \frac{-\alpha}{2\lambda_1} \text{ et } k' = k - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1}.$$

On va seulement traiter le cas $\lambda_1 = 0$, le cas $\lambda_2 = 0$ se traite de façon similaire.

- Si $\alpha = 0$ alors l'équation (3) est de la forme

$$\lambda_2(y' - \beta')^2 + k' = 0$$

  et donc $\mathcal{C}$ est, selon les valeurs de $\frac{-k'}{\lambda_2}$, la réunion de deux droites parallèles (si $\frac{-k'}{\lambda_2} > 0$), une seule droite (si $k' = 0$) ou l'ensemble vide (si $\frac{-k'}{\lambda_2} < 0$).
- Si $\alpha \neq 0$ alors l'équation (3) est de la forme

$$x' = \frac{-\lambda_2}{\alpha}(y' - \beta')^2 - \frac{k'}{\alpha}$$

  et donc $\mathcal{C}$ est une **parabole**.

Conclusion. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

et posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$ alors $\mathcal{C}$ est une conique de *type ellipse* : $\mathcal{C}$ est une ellipse (une conique propre), un point ou l'ensemble vide (une conique dégénérée).
- Si $\Delta > 0$ alors $\mathcal{C}$ est une conique de *type hyperbole* : $\mathcal{C}$ est une hyperbole (une conique propre) ou la réunion de deux droites sécantes (une conique dégénérée).
- Si $\Delta = 0$ alors $\mathcal{C}$ est une conique de *type parabole* : $\mathcal{C}$ est une parabole (une conique propre), la réunion de deux droites parallèles, une droite ou l'ensemble vide (une conique dégénérée).