CONTRÔLE CONTINU FINAL

Mercredi 04 janvier 2017

Durée : 2 heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (3 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. (1 pt)
2. Montrer que A est diagonalisable et expliciter une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$ [On ne demande pas de calculer P^{-1}]. (2pts)

Exercice 2. (4 pts) Discuter selon les valeurs des réels $a, b \in \mathbb{R}$ où $a \neq 0$, la convergence de la série numérique de terme général u_n donné pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}.$$

[*Indication : Étudier séparément les cas $|b| \leq 1$ et $|b| > 1$. Pour chaque cas, trouver un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier la série associée.*]

Exercice 3. (5 pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2xy' + 2y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1. (1 pt)
2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence
$$a_n = \frac{-2}{n} a_{n-2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$
(2 pts)
3. Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. (1 pt)
4. Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence. (1 pt)

Exercice 4. (8pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par
$$f(x) = (x - \pi)^2, \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$. (1pt)
2. Montrer que f est paire. (1pt)
3. Calculer les coefficients de Fourier de f. (2pts)
4. En déduire la série de Fourier de f. On notera sa somme Sf. (1pt)
5. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (1pt)
6. Calculer les sommes des séries numériques suivantes
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$
(2pts)

Exercice 5. Bonus (5pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + \gamma y = f(x)$$

où f est une fonction 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}^*$. On suppose que (E) admet une solution particulière y_0, 2π-périodique et développable en série de Fourier :
$$y_0(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)).$$

1. Montrer qu'on a $\alpha_0 = \dfrac{a_0}{\gamma}$ et pour tout $n \geq 1$, on a
$$\alpha_n = \frac{\gamma a_n - n b_n}{n^2 + \gamma^2}, \quad \beta_n = \frac{n a_n + \gamma b_n}{n^2 + \gamma^2}.$$
où $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est le développement en série de Fourier de f. (3pts)
2. Exprimer en fonction des coefficients a_n et b_n, l'énergie totale du signal représenté par y_0
$$E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_0(x)^2 \, dx$$
comme la somme d'une série numérique. (2pts)