CONTRÔLE CONTINU 2

Mercredi 9 novembre 2016

Durée : 1 heure

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (4 pts)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. Donner la définition de la diagonalisabilité de f. (1 pt)
2. Parmi les matrices suivantes, déterminer, en justifiant (mais sans calcul !), celles qui sont diagonalisables dans une base orthonormée (par rapport au produit scalaire usuel considéré) :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

(2 pts)

3. Parmi les applications suivantes, déterminer, sans justifier, celles qui sont des formes quadratiques

(a) $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_1(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3,$ (b) $q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_2(x,y) = x^2 + 2y^2,$

(c) $q_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_3(x,y,z) = x^2 + \pi y^2 - y + yz,$ (d) $q_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_4(x,y,z) = x^2.$

(1 pt)

Exercice 1. (6 pts) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x - y - z = 0$:

1. Donner une base de F. (1 pt)
2. Déterminer une base orthonormée de F. (3 pts)
3. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{v} = (1, 1, 1)$ sur F. (2 pts)

Exercice 2. (10 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\vec{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_3 + x_2x_3),\quad \text{pour tout } \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
(1 pt)
2. Calculer les valeurs propres de A. (2 pts)
3. Déterminer une base orthonormée (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A. (2 pts)
4. Expliciter une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice orthogonale P vérifiant $A = PDP^{-1}$. (2 pts)
5. Donner l'expression de q dans la base $\mathcal{B}$. La forme polaire φ_q de q définit-elle un produit scalaire ? (2 pts)
6. Quelle est la signature et quel est le rang de q ? (1 pt)