CONTRÔLE CONTINU 1

Mercredi 12 octobre 2016
Durée : 1 heure (16h15-17h15)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et l'espace vectoriel

$$E = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{u} = \vec{0}\}.$$

1. Déterminer le rang de A. (2 pts)
2. Écrire l'application linéaire $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée canoniquement à A. (1 pt)
3. A-t-on $E = Ker(f_A)$? Justifier votre réponse. (1 pt)

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille de vecteurs

$$\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (2,1,1), \vec{u}_3 = (3,1,0).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (2 pts)
2. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{CB}}$ de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$. (1 pt)
3. Déterminer la matrice de passage inverse $P_{\mathcal{BC}}$. (3 pts)

   Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

   $$f(x, y, z) = (x + 2z, x + y + z, -y + z).$$

4. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (1 pt)
5. Déterminer une base du noyau de f. En déduire le rang de f. (2 pts)
6. Déterminer la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$. (2 pts)

Exercice 2. (5 pts) Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} x + y + \lambda z = 1, \\ (\lambda - 1)y + z = 1, \\ x + \lambda y + (2 + \lambda)z = 4. \end{array} \right.$$