Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI UE Math3
Printemps 2014 — Responsable : Johannes Kellendonk

CONTROLE FINAL du 3/06/2014, durée 2 heures

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barême est indicatif.

Exercice 1 [3.5 pts] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$.

1. Pour quelles valeurs de α la suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est-elle convergente ?
3. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+n}\right)$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 [4 pts]

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
2. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière et $0 < q < 1$. On suppose que $a_0 \neq 0$ et que
$$a_n \frac{\sqrt{n^2q^2+1}}{n} \leq a_{n+1} \leq a_n \, n \sin\left(\frac{q}{n}\right).$$
Quel est le rayon de convergence de la série ?

Exercice 3 [8 pts] On considère $C^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions infiniment dérivables avec l'application $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ donnée par
$$L(f)(x) = f'(x) + xf(x).$$

1. Montrer que L est linéaire.
2. Trouver la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui est solution de l'équation différentielle
$$f'(x) = -xf(x)$$
qui satisfait $f(0) = 1$.
3. Quel est le rayon de convergence de la série trouvée en 2 ?
4. On admet que toute solution de l'equation différentielle de 2 s'écrit sous forme d'une série entière. Quelle est la dimension du noyeau $\ker L$ de L ?

Exercice 4 [6 pts] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, donnée sur $[-\pi, \pi[$ par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
3. En déduire la série de Fourier de f. On notera $Sf(x)$ la somme de cette série. Quelle est la valeur de $Sf(2\pi)$?
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $Sf(x) = f(x)$?